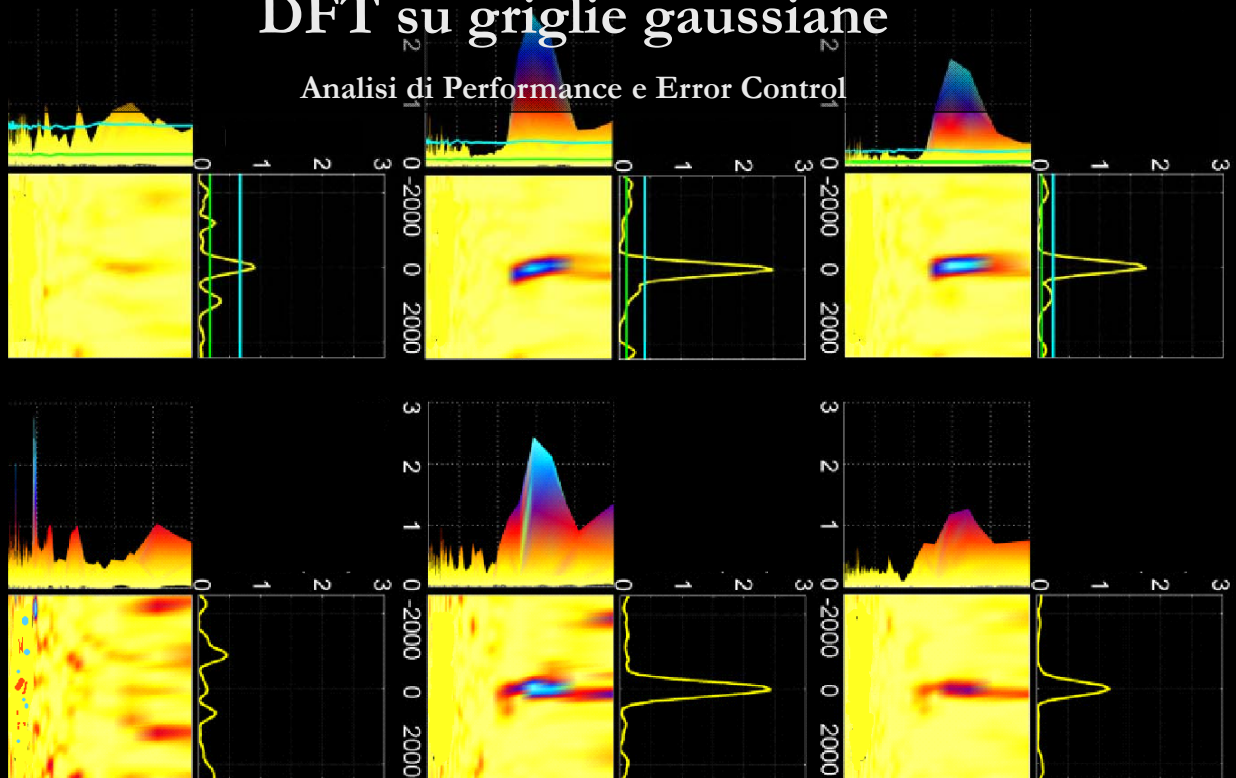


Il pricing veloce delle componenti derivative: DFT su griglie gaussiane



Marcello Minenna – Paolo Verzella
RISK ITALIA – 29 Novembre 2007 - Milano



Indice della presentazione

- **L'Option Pricing via DFT**
 - Formule per il prezzo di un derivato via FT
 - Convergenze della DFT alla FT
 - Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
 - Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane
- **L'Option Pricing Veloce**
 - FFT
 - FFT Non Uniforme
 - L'algoritmo interpolante "Gaussian Gridding"
 - Analisi di Performance: Velocità, Stabilità, Accuratezza
- **Conclusioni**

•L'Option Pricing via DFT

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

Il Pricing via FT

Call Europea C_t $f_2(\ln S_T, \xi | \ln S_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi \ln S_T} q_2(\ln S_T | \ln S_0) d \ln S_T$

Prezzo Spot S_t sotto la misura neutra al rischio



Una trasformazione lineare dallo Spazio di Fourier



Il Pricing via FT

Call Europea C_t $f_2(\ln S_T, \xi | \ln S_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi \ln S_T} q_2(\ln S_T | \ln S_0) d \ln S_T$

Prezzo Spot S_t sotto la misura neutra al rischio



Una trasformazione lineare dallo Spazio di Fourier

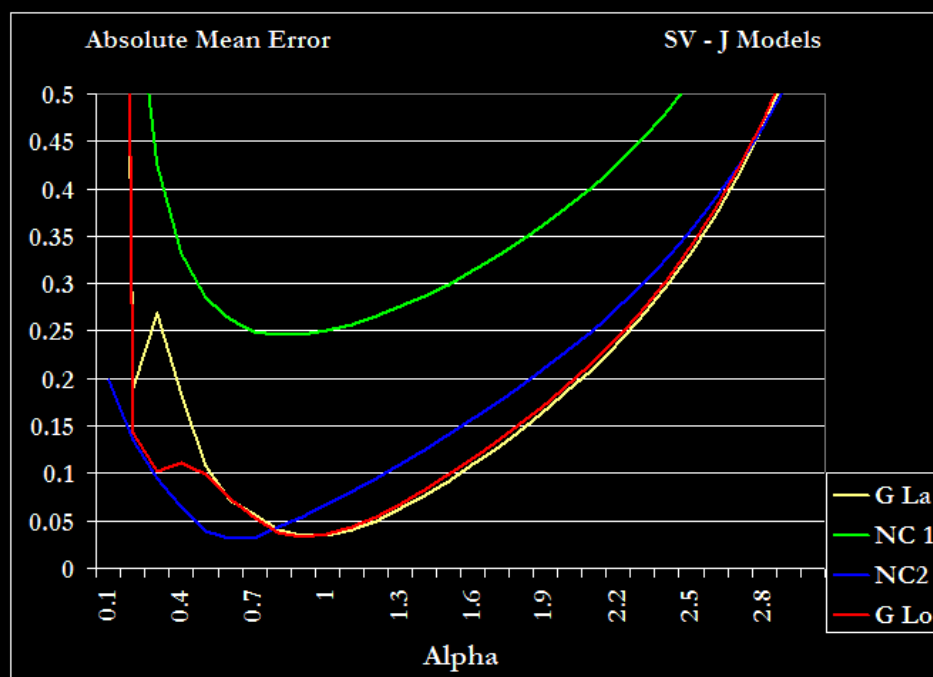


$$C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left(e^{i\xi \ln K} \frac{e^{-rT} f_2(\xi - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha + 1)\xi} \right) d\xi$$

Il Pricing via FT

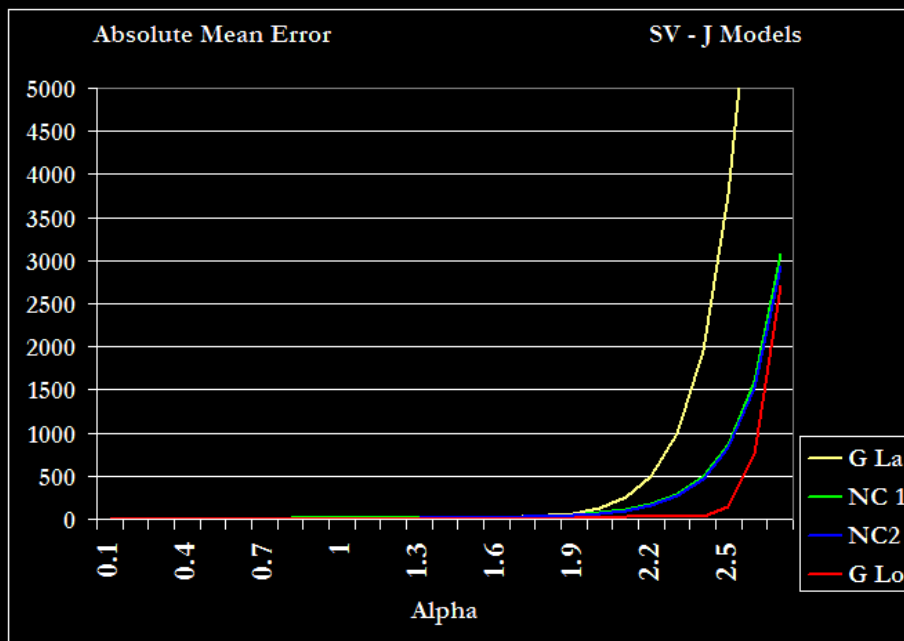
Accuratezza

Errore Medio Assoluto calcolato rispetto ad. α su uno spazio (σ, τ)



Stabilità

Errore Medio Assoluto calcolato rispetto ad α su uno spazio (σ, τ) esteso



Indice della presentazione

•L'Option Pricing via DFT

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- **Convergenze della DFT alla FT**
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

Data la DFT Generalizzata



$$\omega(m) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{X}x_j(m-1)} f(x_j) \quad \text{where } m = 1, 2, \dots, M$$

$M \neq N$

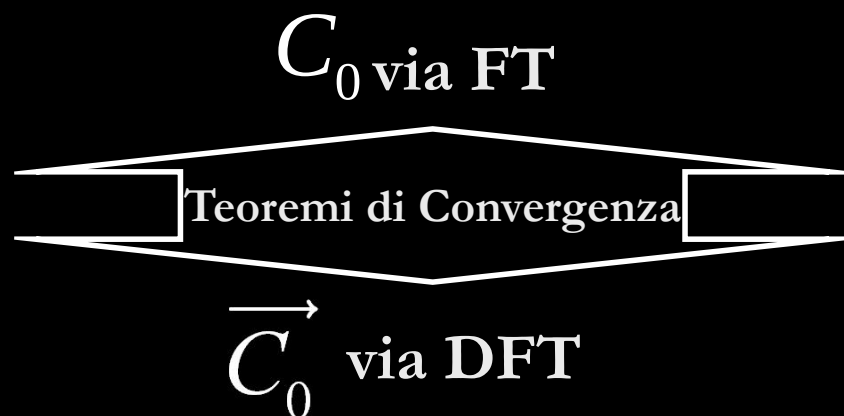
Convergenze su Griglie Non Uniformi

Il Teorema di Convergenza per la DFT generalizzata (C Th)



$$\mathcal{F}[f(x)](t_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{X}x_j(m-1)} f(x_j, X)$$

$$t_m = \frac{2\pi}{X}(m-1)$$



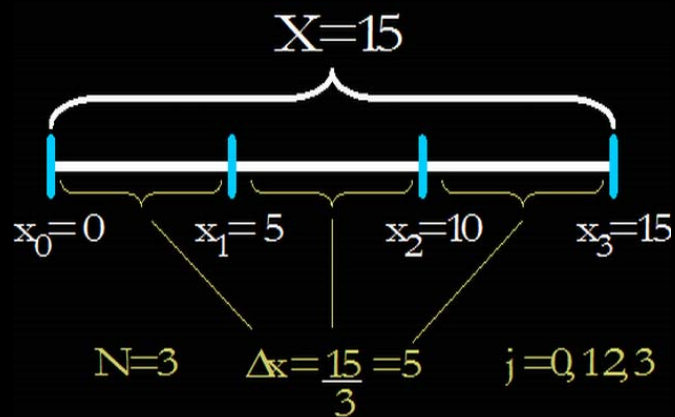
Indice della presentazione

• **L'Option Pricing via DFT**

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- **Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi**
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

Condizione 1

Griglia di Discretizzazione Uniforme



Condizione 2

$$N=M$$

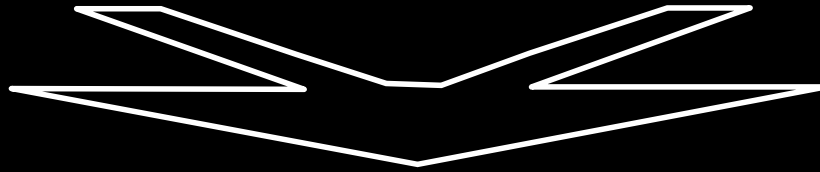


DFT specializzata

$$\omega(n) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{X} x_j (n-1)} f(x_j) \quad \text{where } n=1,2,\dots,N$$

Condizione 1

Condizione 2



DFT classica

$$\omega(n) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{N} j(n-1)} f(x_j) \quad \text{where } n = 1, 2, \dots, N$$

Limite di Nyquist – Shannon (N-S)

$$\mathcal{F}[f(x)](t_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{X}{N} \omega(n)$$

$$\{t_n\}_{n=1 \dots \frac{N}{2}} \quad \text{for } N \text{ even}$$

$$\{t_n\}_{n=1 \dots \frac{N+1}{2}} \quad \text{for } N \text{ odd}$$

$$C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left(e^{i\xi \ln K} \frac{e^{-rT} f_2(\xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} \right) d\xi$$



Griglia di Discretizzazione Uniforme per f

1. $f(v_{j-1}) = e^{-i(j-1)\eta[\ln S_t - b]} \psi_0((j-1)\eta)$
2. $f(v_{j-1}) = e^{-i(j-1)\eta[\ln S_t - b]} \psi_0((j-1)\eta) \cdot (3 + (-1)^j - \delta_{j-1})$

1.
$$C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left(e^{i\xi \ln K} \frac{e^{-rT} f_2(\xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} \right) d\xi$$

$$f(v_{j-1}) = e^{-i(j-1)\eta[\ln S_t - b]} \psi_0((j-1)\eta) + \text{N-S}$$

$$C_0[\ln K]_u^- \approx \frac{e^{-\alpha[\ln S_t - b + \lambda(u-1)]}}{b} \cdot \Re(\omega(u))$$

2.

$$C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left(e^{i\xi \ln K} \frac{e^{-rT} f_2(\xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} \right) d\xi$$

$$f(v_{j-1}) = e^{-i(j-1)\eta[\ln S_t - b]} \psi_0((j-1)\eta) \cdot (3 + (-1)^j - \delta_{j-1})$$

+

N-S

$$C_0[\ln K]_u^- \approx \frac{e^{-\alpha[\ln S_t - b + \lambda(u-1)]}}{3b} \cdot \Re(\omega(u))$$

Teorema di Equivalenza



Il prezzo della Call calcolato via Teorema di
Convergenza è uguale al prezzo della Call
calcolato via Trapezoid/Simpson Quadrature

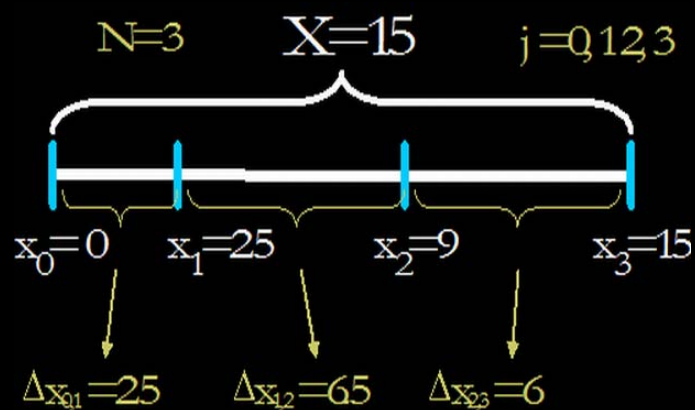
•L'Option Pricing via DFT

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

Convergenze su Griglie Non Uniformi

Condizione 1

Griglie di Discretizzazione Non Uniformi



Condizione 1

Griglie Gaussiane



Scelta Ottimale dei punti di discretizzazione



Gauss Laguerre



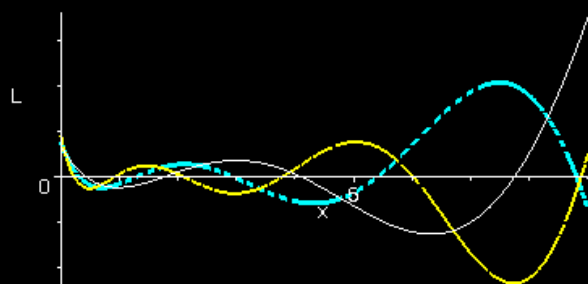
Gander Gautschi

Condizione 1

Griglie Gaussiane



Scelta Ottimale dei punti di discretizzazione



Zero di
Polinomi di Laguerre

Condizione 1

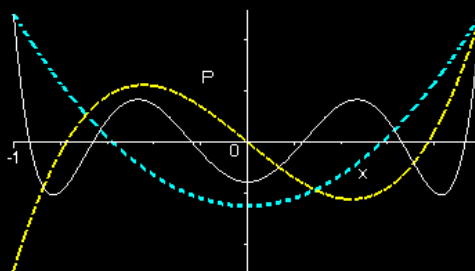
Griglie Gaussiane



Scelta Ottimale dei punti di discretizzazione

Gauss Lobatto

Zero di
Polinomi di Legendre



25

Condizione 1

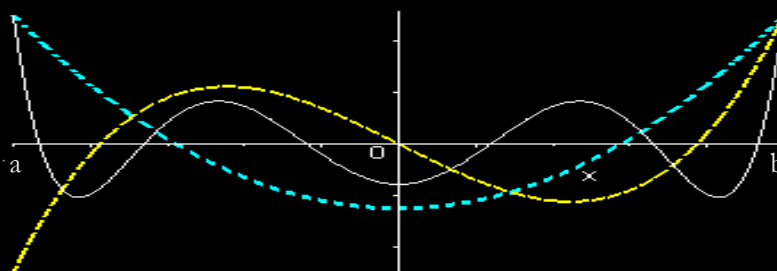
Griglie Gaussiane



Scelta Ottimale dei punti di discretizzazione

Gander Gautschi

Zero di Polinomi di
Legendre riscalat



26

Condizione 2

$$N \neq M$$



DFT Generalizzata

$$\omega(m) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{X} x_j (m-1)} f(x_j) \quad \text{dove } m=1,2,\dots,M$$

Il Teorema di Convergenza per la DFT generalizzata (C Th)



$$\mathcal{F}[f(x)](t_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{X} x_j (m-1)} f(x_j, X)$$

$$t_m = \frac{2\pi}{X} (m-1)$$

$$C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left(e^{i\xi \ln K} \frac{e^{-rT} f_2(\xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} \right) d\xi$$



Griglie Gaussiani per f

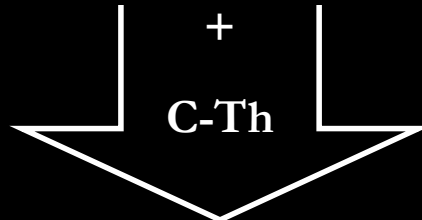
$$1. \quad f(v_{j-1}) = e^{[1+i(\frac{M\pi}{a^*} - \ln S_t)]v_{j-1}} \psi_0(v_{j-1}) \quad \frac{1}{L_{N+1}(v_{j-1})L'_N(v_{j-1})}$$

$$2. \quad f\left(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1})\right) = \left[e^{-i(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1}))[\ln S_t - \frac{M\pi}{a}]} \psi_0\left(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1})\right) \right] \frac{1}{[P_{N-1}(v_{j-1})]^2}$$

$$1. \quad C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left(e^{i\xi \ln K} \frac{e^{-rT} f_2(\xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} \right) d\xi$$



$$f(v_{j-1}) = e^{[1+i(\frac{M\pi}{a^*} - \ln S_t)]v_{j-1}} \psi_0(v_{j-1}) \quad \frac{1}{L_{N+1}(v_{j-1})L'_N(v_{j-1})}$$

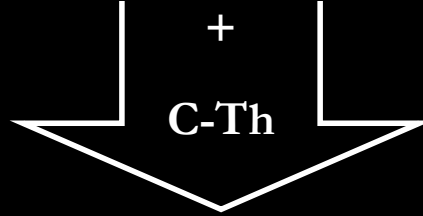


$$C_0([\ln K]_u^*) \approx -\Re \left[\frac{e^{-\alpha(\ln S_t - \frac{M\pi}{a^*} + \frac{2\pi}{a^*}(u-1))}}{\pi} \frac{1}{N+1} \cdot \omega^*(u) \right]$$

2.

$$C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left(e^{i\xi \ln K} \frac{e^{-rT} f_2(\xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} \right) d\xi$$

$$f\left(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1})\right) = \left[e^{-i\left(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1})\right)\left[\ln S_t - \frac{M\pi}{a}\right]} \psi_0\left(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1})\right) \right] \frac{1}{[P_{N-1}(v_{j-1})]^2}$$



$$C_0([\ln K]_u^*) \approx \Re \left[\frac{e^{-\alpha\left(\ln S_t - \frac{M\pi}{a^*} + \frac{2\pi}{a^*}(u-1)\right)}}{\pi} \frac{1}{N(N-1)} \cdot \omega^*\left(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1})\right) \right]$$

Teorema di Equivalenza



Il prezzo della Call calcolato via Teorema di
Convergenza è uguale al prezzo della Call
calcolato via Gauss Laguerre/Gander Gautschi
Quadrature

- **L'Option Pricing via DFT**

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

- **L'Option Pricing Veloce**

- FFT
- FFT Non Uniforme
 - L'algoritmo interpolante "Gaussian Gridding"
 - Analisi di Performance: Velocità, Stabilità, Accuratezza

- **Conclusioni**

L'Option Pricing Veloce

$\overrightarrow{C}_t$ via DFT

consente

Algoritmi
Fast Fourier Transform

$\overrightarrow{C}_t$ via DFT

Newton-Cotes

FFT Uniforme

$\overrightarrow{C}_t$ via DFT

Gauss

FFT Non Uniforme

- **L'Option Pricing via DFT**

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

- **L'Option Pricing Veloce**

- **FFT**
- FFT Non Uniforme
 - L'algoritmo interpolante "Gaussian Gridding"
 - Analisi di Performance: Velocità, Stabilità, Accuratezza

- **Conclusioni**

FFT Uniformi

Caratterizzazione della DFT di Cooley - Tukey



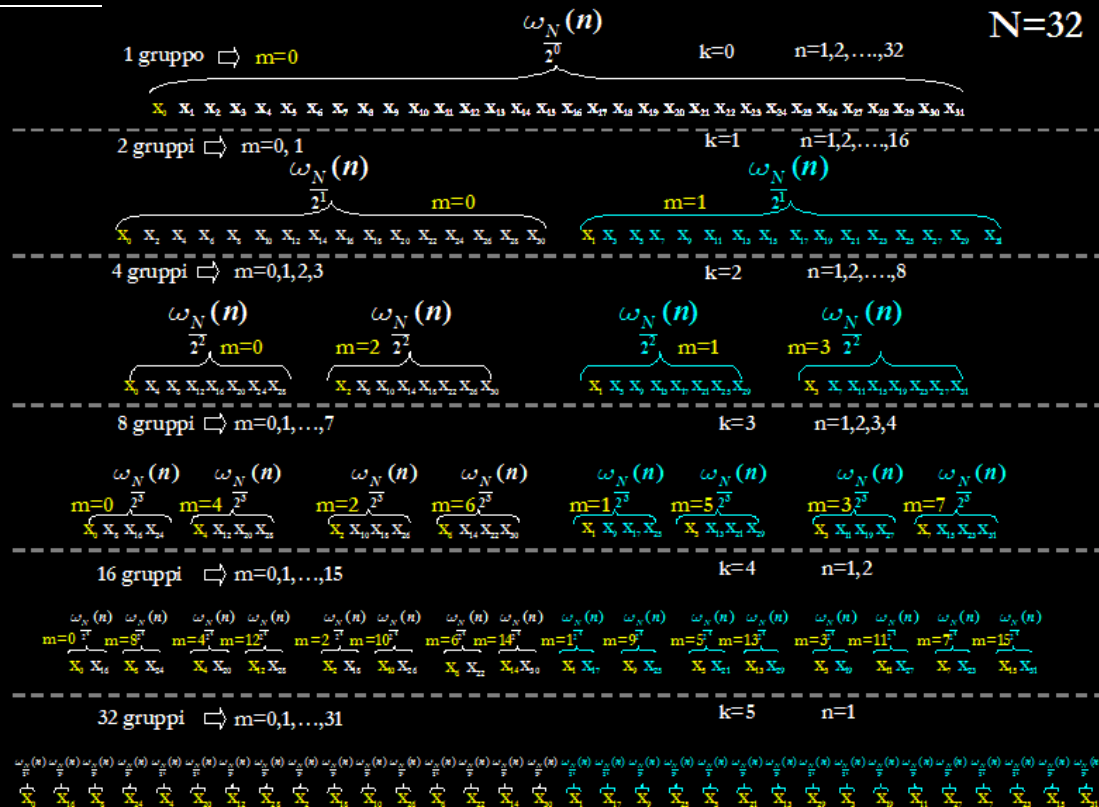
$$\omega_2^m(n) = f(x_m) + W_2^{(n-1)} f(x_{m+N/2}) \quad \text{for } n = 1, 2$$



Iterando dal basso verso l'alto per N passi



Si ottiene l'algoritmo FFT di Cooley – Tukey



Algoritmo FFT di Cooley – Tukey

Il costo computazionale della DFT si riduce

da

$$O(N^2)$$

a

$$O(N \log_2 N)$$

Dato il Limite di Nyquist – Shannon,
le formule di prezzo

via FFT

forniscono prezzi accurati
SOLO
intorno alla Frequenza di Nyquist

Dato il Limite di Nyquist – Shannon,
le formule di prezzo

via FFT

forniscono prezzi accurati
SOLO
intorno alla Frequenza di Nyquist

All'incirca il 25% dei prezzi può essere accettato

- **L'Option Pricing via DFT**

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

- **L'Option Pricing Veloce**

- FFT
- **FFT Non Uniforme**
 - **L'algoritmo interpolante "Gaussian Gridding"**
 - Analisi di Performance: Velocità, Stabilità, Accuratezza

- Conclusioni

Gaussian Gridding



Step 1

Convoluzione Gaussiana della funzione caratteristica
non uniformemente campionata



$$f_{\tau}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_j - x - 2k\pi)^2}{4\tau}}$$

Gaussian Gridding



Step 1

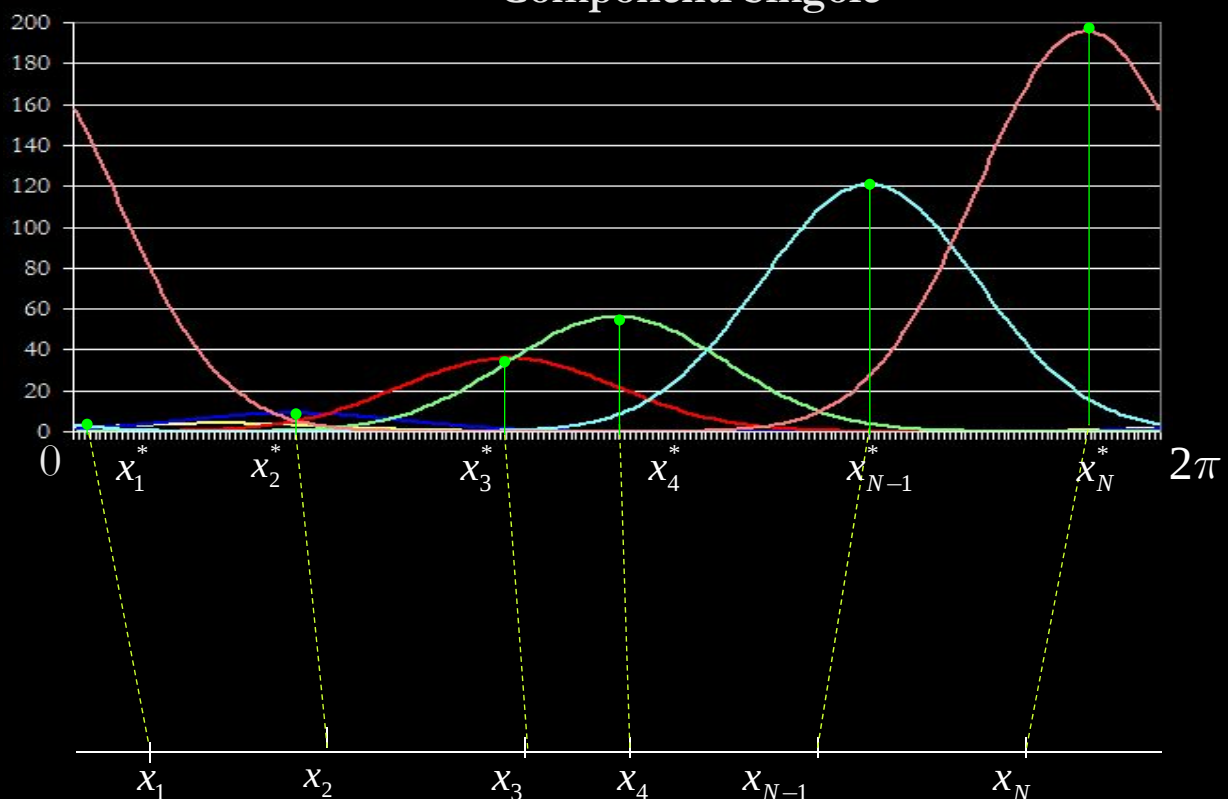
Convoluzione Gaussiana della funzione caratteristica non uniformemente campionata



$$f_{\tau}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_j - x - 2k\pi)^2}{4\tau}}$$

FFT Non Uniforme

Componenti Singole



Gaussian Gridding



Step 1

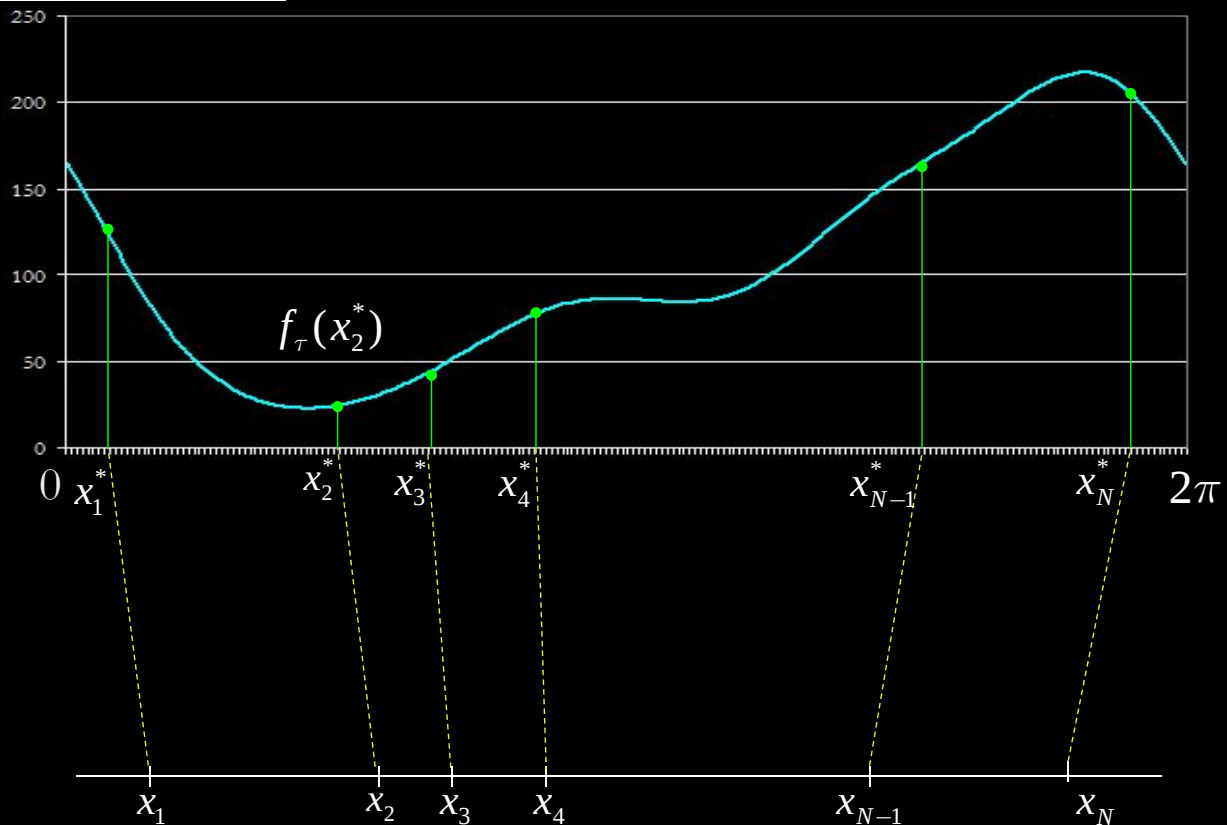
Convoluzione Gaussiana della funzione caratteristica
non uniformemente campionata



$$f_{\tau}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_j - x - 2k\pi)^2}{4\tau}}$$

47

FFT Non Uniforme



48

Gaussian Gridding



Step 2

Discretizzazione su una griglia uniforme sovracampionata $f_\tau(x)$

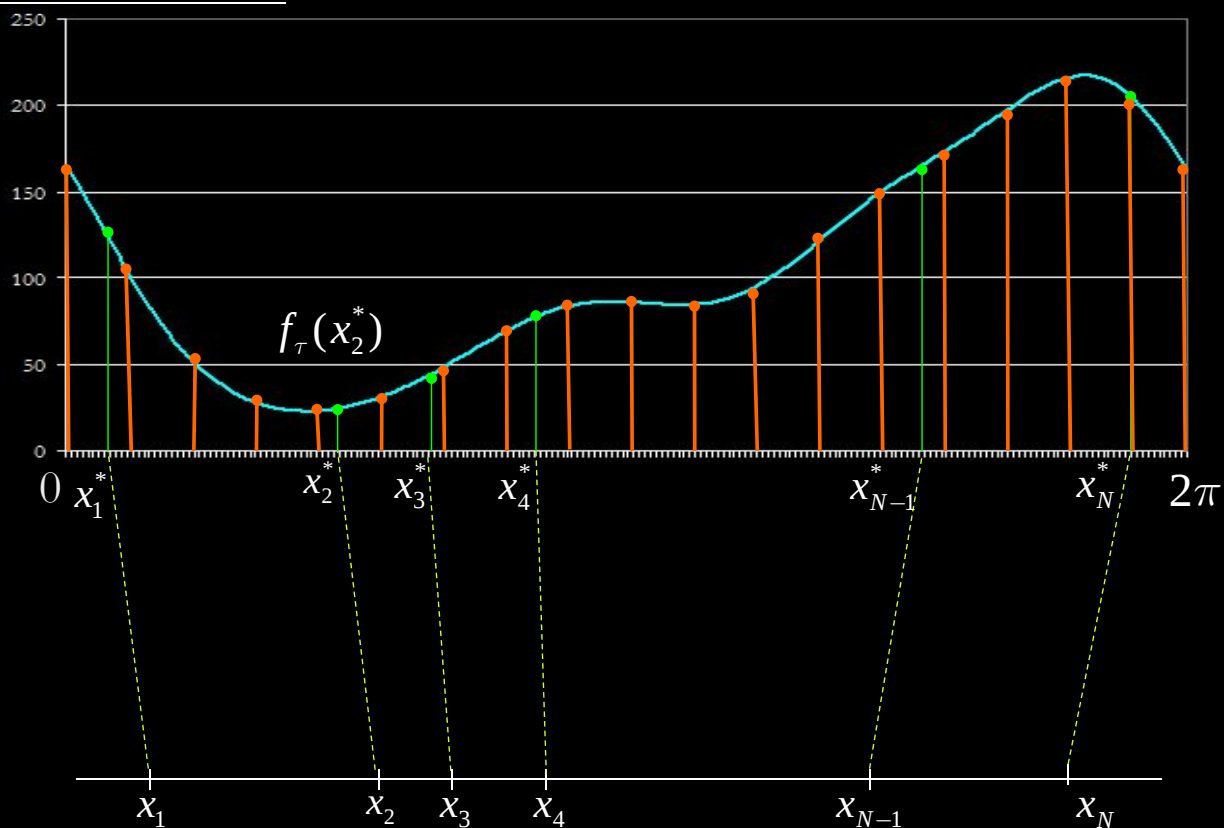


$$\tilde{f}_\tau(y_m) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \tilde{K}(y_m, x_j, \sqrt{2\tau}; 2\pi)$$

dove

$$\tilde{K}(y_m, x_j, \sqrt{2\tau}; 2\pi) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2\pi \frac{x_j}{X} - 2\pi \frac{y_m}{M_\tau} - 2\pi k)^2}{4\tau}} \\ \text{oppure} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_j^* - 2\pi \frac{y_m}{M_\tau} - 2\pi k)^2}{4\tau}} \end{cases}$$

FFT Non Uniforme



Gaussian Gridding



Step 3

Calcolo del Coefficiente di Fourier $f_\tau(x)$ discretizzato



$$F_\tau(n) = \lim_{M_\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{M_\tau} \sum_{m=0}^{M_\tau-1} \tilde{f}_\tau \left(m \frac{2\pi}{M_\tau} \right) e^{-im \frac{2\pi}{M_\tau} (n-1)}$$

Gaussian Gridding



Step 4

Rappresentazione NU-DFT del Coefficiente di Fourier $F_\tau(n)$



$$\tilde{\omega}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{n^2 \tau} F_\tau(n)$$

Gaussian Gridding



Step 5

Rappresentazione DFT del Coefficiente di Fourier $F_{\tau}(n)$



$$F_{\tau}(n) = \lim_{M_{\tau} \rightarrow \infty} \frac{1}{M_{\tau}} \omega(n)$$

$$\text{per } n = 1, 2, \dots, \frac{M_{\tau}}{2}$$

Gaussian Gridding



Step 6

Derivazione della NU-DFT come una funzione della DFT

$$F_{\tau}(n) = \lim_{M_{\tau} \rightarrow \infty} \frac{1}{M_{\tau}} \omega(n)$$

$$\tilde{\omega}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{n^2 \tau} F_{\tau}(n)$$

$$\tilde{\omega}(n) = \lim_{M_{\tau} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{\tau^*}} e^{n^2 \tau^*} \frac{1}{M_{\tau}} \omega(n)$$

$$\text{per } n = 1, 2, \dots, \frac{M_{\tau}}{2}$$

Gaussian Gridding



Step 7

Calcolo NU-FFT



$$\boxed{\tilde{\omega}(n)} = \lim_{M_{\tau} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{\tau^*}} e^{n^2 \tau^*} \frac{1}{M_{\tau}} \boxed{\omega(n)}$$

FFT

Gaussian Gridding



Step 7

Calcolo NU-FFT



$$\boxed{\tilde{\omega}(n)} = \lim_{M_{\tau} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{\tau^*}} e^{n^2 \tau^*} \frac{1}{M_{\tau}} \boxed{\omega(n)}$$

NU-FFT

FFT

Costo Computazionale



Il maggior costo computazionale della procedura è la FFT su griglia sovracampionata



scegliendo il rapporto di sovracampionatura

$$M_t = 2M$$



Il costo totale della procedura è $\simeq 2M \log 2M$

Indice della presentazione

- **L'Option Pricing via DFT**

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

- **L'Option Pricing Veloce**

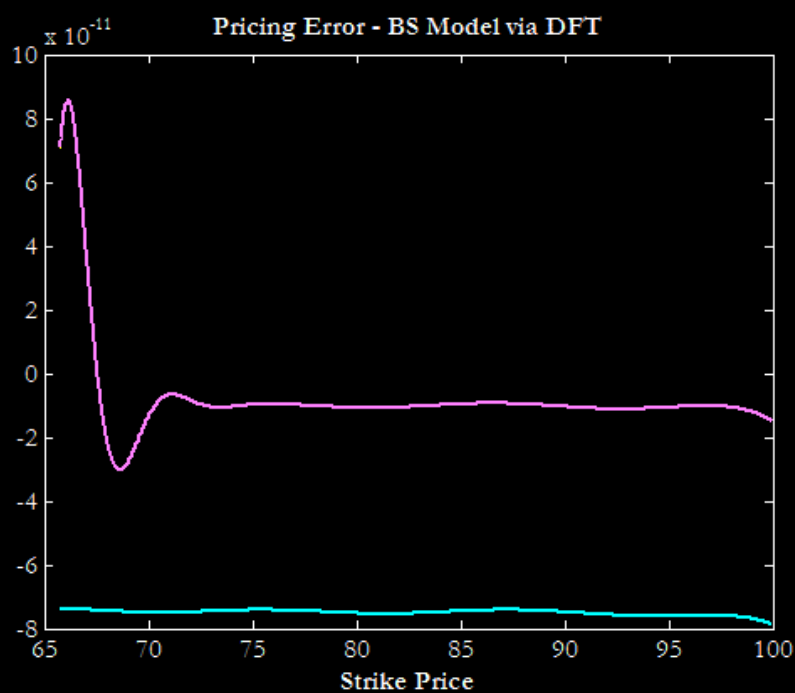
- FFT
- **FFT Non Uniforme**
 - L'algoritmo interpolante "Gaussian Gridding"
 - **Analisi di Performance: Velocità, Stabilità, Accuratezza**

- Conclusioni

ACCURATEZZA



59



2000 Prices computed

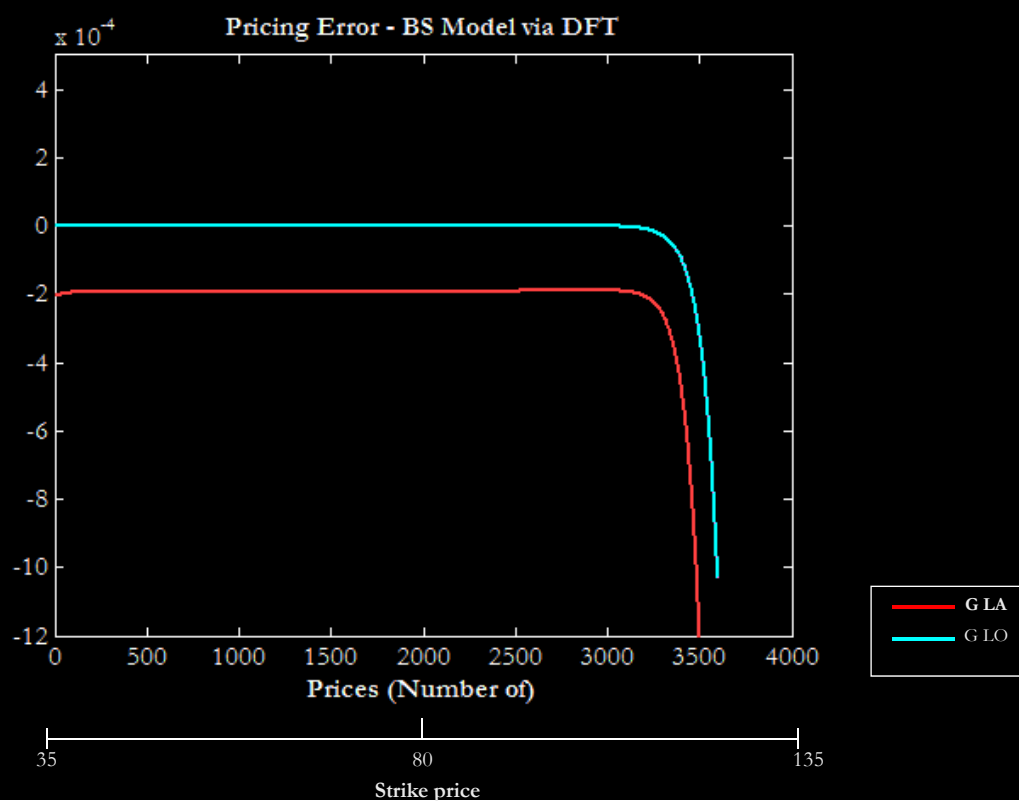
60



STABILITA'



61



62



STABILITA'



L'errore del **90%** dei prezzi
calcolati ricade entro

STABILITA'



L'errore del **90%** dei prezzi
calcolati ricade entro



10^{-3}

L'INTERVALLO DI PRECISIONE

VELOCITA'



VELOCITA'



lo schema NU – FFT è all'incirca
2 volte più lento di FFT

VELOCITA'



Per tempi minimi, le
differenze **scompaiono**

VELOCITA'



Per tempi minimi, le
differenze **scompaiono**

FFT	NC2	G - LA	G - LO
	0.01 sec.	N/A	N/A
NU – FFT	NC2	G - LA	G - LO
	0.02 sec.	0.0261 sec.	0.0301 sec.

Calcolo di 4000 prezzi su un Centrino 1600Mhz – 2gb RAM
Valore medio su 1000 run

- **L'Option Pricing via DFT**
 - Formule per il prezzo di un derivato via FT
 - Convergenze della DFT alla FT
 - Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
 - Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane
- **L'Option Pricing Veloce**
 - FFT
 - FFT Non Uniforme
 - L'algoritmo interpolante "Gaussian Gridding"
 - Analisi di Performance: Velocità, Stabilità, Accuratezza
- **Conclusioni**

Conclusioni

- NU – FFT permette l'uso di Griglie Gaussiane
- NU – FFT è indifferente al limite di Nyquist - Shannon
- NU – FFT è accurato almeno quanto FFT
- NU – FFT è più stabile di FFT
- **NU – FFT è veloce tanto quanto FFT classico**

NU – FFT

è un candidato naturale per
l'uso operativo sui desk di trading