

Stabilità Parametrica nel Pricing e nella Calibrazione di Modelli Affine Jump Diffusion

Marcello Minenna
CONSOB

Paolo Verzella
Università degli Studi Milano Bicocca

XXVIII Congresso AMASES – 12 Settembre 2004

Il presente lavoro mira a due principali obiettivi:



1

Fornire un quadro adeguato della stabilità numerica di uno dei più comuni modelli Affine Jump Diffusion di option pricing, evidenziando le interrelazioni non lineari tra i parametri e le complessità nascoste del modello, ipotizzando una possibile **applicazione operativa**

Il presente lavoro mira a due principali obiettivi:



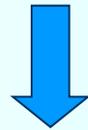
2

Valutare le performance di alcuni algoritmi di calibrazione del modello sui dati di mercato, analizzare i problemi connessi e fornire una serie di **procedure** e **consigli** utili nel calcolo numerico

Un (rapido) passo indietro

Modello a Volatilità Stocastica di Heston (1993)

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dz_1(t) \\ (1) \quad dv(t) &= [\delta^2 - 2\beta v(t)]dt + 2\delta\sqrt{v(t)}dz_2(t) \end{aligned}$$



Formula (Semi)Chiusa per la Valutazione di un Contingent Claim
(Heston 1993)

$$(2) \quad V(S, v, t) = \Psi \cdot (SP_1(\Psi, \Theta) - Ke^{-r\tau} P_2(\Psi, \Theta))$$

Le Greche di Heston

Tutte le Variazioni prime e seconde dei parametri rispetto a tutti gli altri sono state calcolate numericamente e visualizzate **graficamente**

10 Parametri $C_H(S, X, \tau, r, v(t), \lambda^*, \rho_{1,2}, \kappa, \theta, \sigma)$



$9 \times 10 \times 2 = \mathbf{180}$ Grafici che descrivono compiutamente le loro interrelazioni

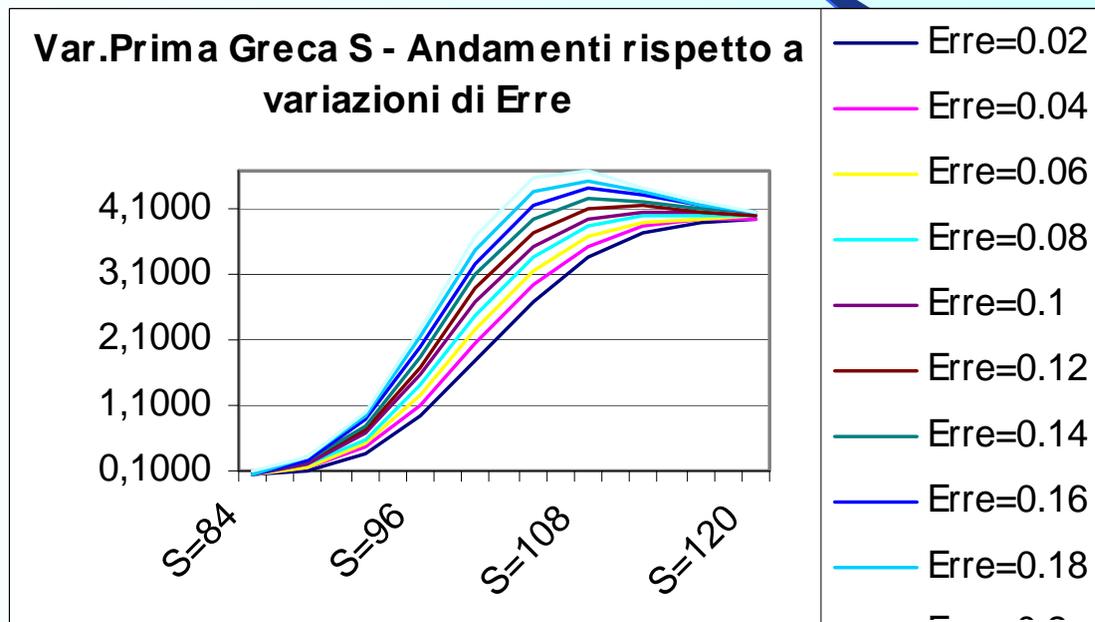
1° Vantaggio

Tale tabulazione fornisce un riferimento indispensabile per un eventuale utilizzo del modello (per operazioni di copertura, ad esempio), soprattutto nella misura in cui il comportamento delle Greche Heston differisce da quello delle Greche Black – Scholes.

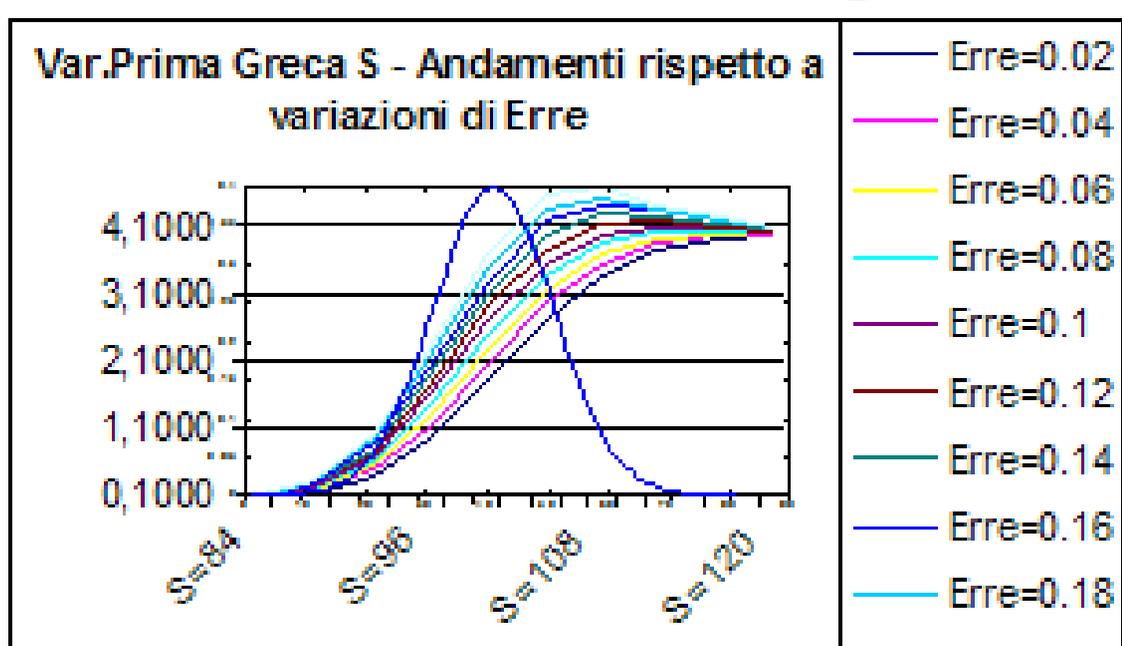
2° Vantaggio

In seconda battuta, la conoscenza piena delle interrelazioni non lineari tra i parametri (cd scenari parametrici “sensibili”) consente di valutare attentamente eventuali anomalie da gestire in sede operativa

Esempio (1) - Gamma Heston $\frac{\partial^2 C_H}{\partial S^2}$



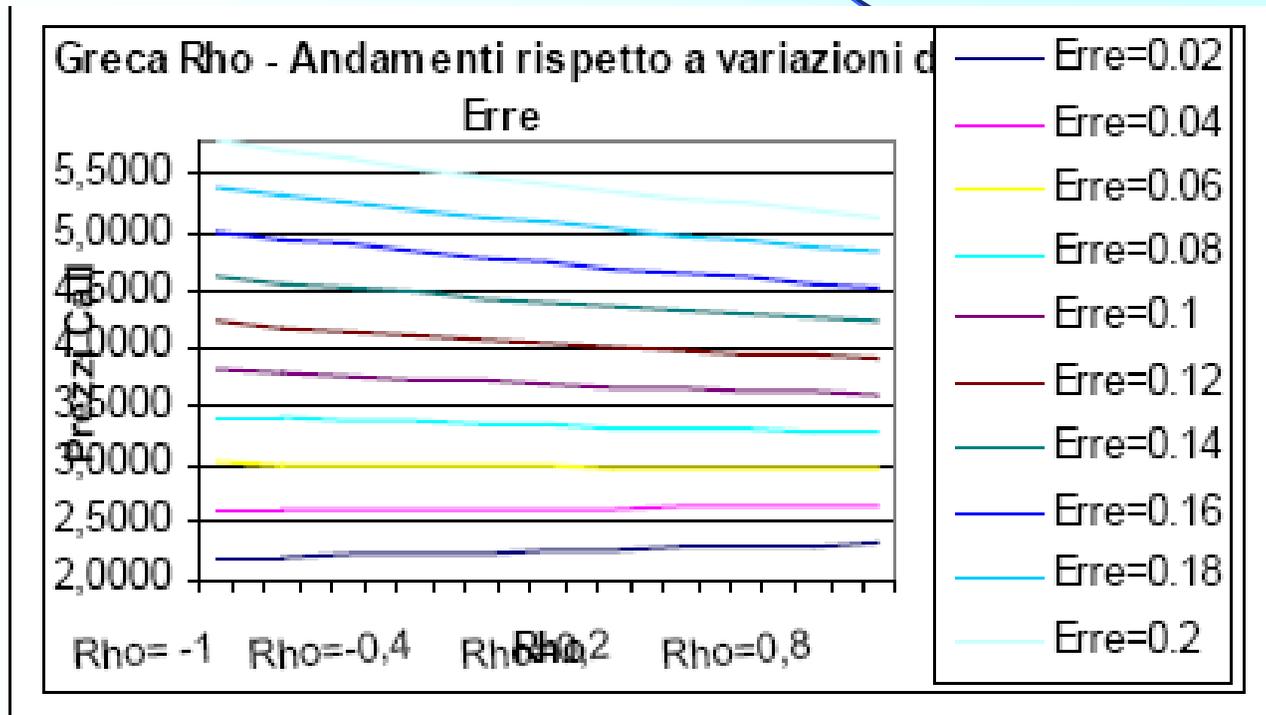
Chiaramente, il Gamma Heston declina molto lentamente al crescere della moneyness rispetto al Gamma Black - Scholes



Esempio (2) – Greca RHO (Correlazione) Heston

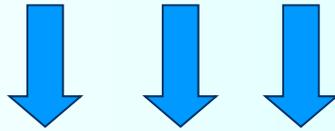
Variazioni rispetto a r

$$\frac{\partial C_H}{\partial \rho}$$



E' immediato notare come l'andamento della Greca sia completamente **alterato** dall'influenza incrociata del parametro **r**.

Non è equivalente dunque tentare ad esempio un **Rho – Hedging** in uno scenario con un basso tasso di interesse rispetto ad uno scenario con un tasso alto.



Estendiamo al modello Affine Jump Diffusion di Bakshi – Cao – Chen (1997) queste valutazioni, congiuntamente ad un'analisi di stabilità numerica della formula di option pricing

Modello di Bakshi – Cao – Chen (1997)

$$dS(t) = [R(t) - \lambda\mu_j]S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dz_s(t) + S(t)J(t)dq(t)$$

$$dv(t) = [\theta_v - \kappa_v v(t)]dt + \sigma_v \sqrt{v(t)}dz_v(t)$$

$$dR(t) = [\theta_R - \kappa_R R(t)]dt + \sigma_R \sqrt{R(t)}dz_R(t)$$

$$\ln[1 + J(t)] \approx N\left(\ln(1 + \mu_j) - \frac{1}{2}\sigma_j^2, \sigma_j^2\right)$$

Principali caratteristiche:

Presenta di salti discontinui del valore del sottostante

Presenza di un tasso di interesse stocastico

Naturale estensione al contesto Affine Jump

Diffusion del modello a volatilità stocastica di Heston

Formula (Semi)Chiusa per la Valutazione di un Contingent Claim (Bakshi – Cao – Chen 1997)

$$V(S, v, t) = \Psi \cdot (SP_1(\Psi, \Theta) - KB(t, \tau)P_2(\Psi, \Theta))$$

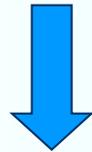
con
$$P_j(x, v, \tau; \ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln[K]} \tilde{f}_j(x, v, \tau; \phi)}{i\phi} \right] d\phi$$



Trasformata Inversa di Fourier

Analisi di Stabilità Numerica

2 Routine di Quadratura della Trasformata di Fourier



**Quad8 - Optimization Toolbox
(Standard)**



D01ajf – NAG Toolbox

La routine NAG è in grado di gestire un numero finito di punti di singolarità

Criterio di valutazione della stabilità numerica della Trasformata di Fourier

- Se per una particolare combinazione di parametri

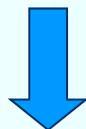
$$(\bar{S}, \bar{X}, \bar{\tau}, \bar{r}, \bar{v}(t), \bar{\lambda}, \bar{\mu}_J, \bar{\sigma}_J, \bar{\rho}, \bar{\kappa}_v, \bar{\theta}_v, \bar{\sigma}_v, \bar{\kappa}_r, \bar{\theta}_r, \bar{\sigma}_r)$$

$$|C_{BCC}[QUAD8] - C_{BCC}[NAG]| \geq 0.01$$

Tale combinazione è considerata fonte di instabilità numerica tale da produrre prezzi inattendibili

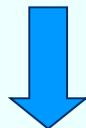
Peculiarità:

E' lo stesso tipo di test effettuato sul modello di Heston, con lo stesso margine di tolleranza



Ipotesi:

La maggiore numerosità parametrica dovrebbe migliorare la stabilità numerica della Trasformata Inversa di Fourier.

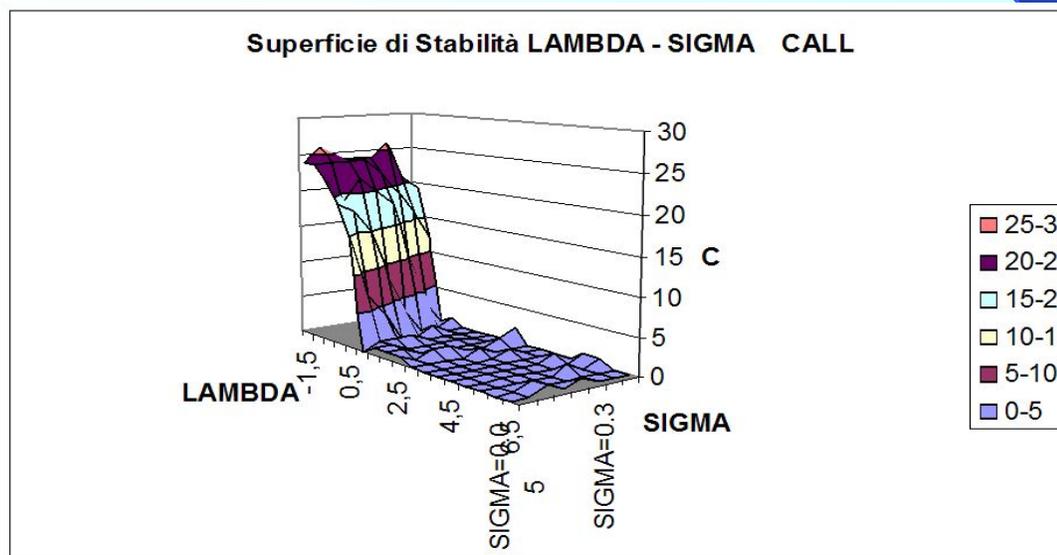


Risultato:

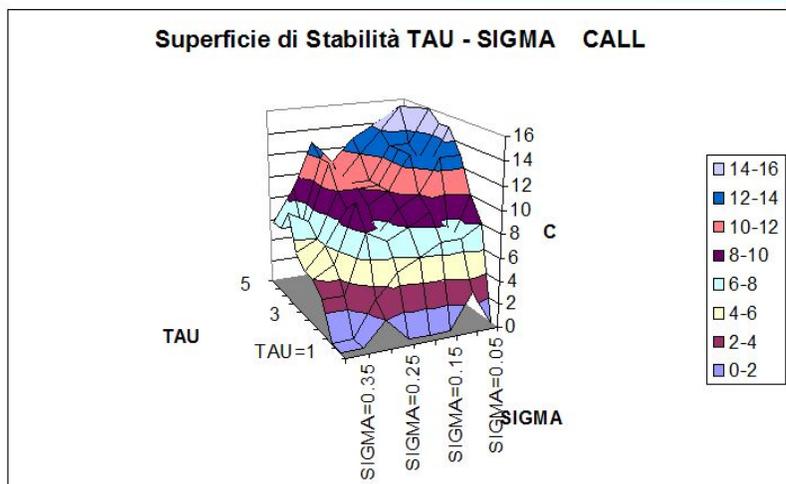
Con tale margine di tolleranza i prezzi non significativi sono di numero **ridottissimo**

Stability Surfaces

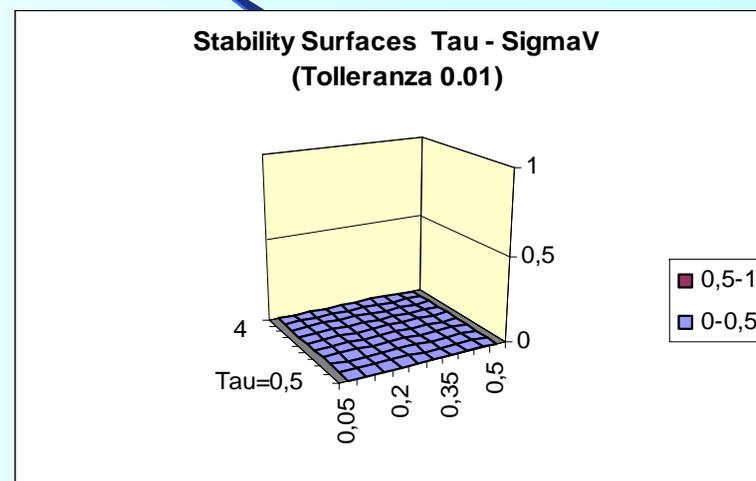
- Tali superfici sono una rappresentazione sintetica ed efficace dell'influenza dei vari parametri sulla stabilità della formula, e delle loro interrelazioni reciproche;



Esempio: Stability Surfaces – Tau SigmaV Heston vs Bakshi – Cao - Chen



Heston

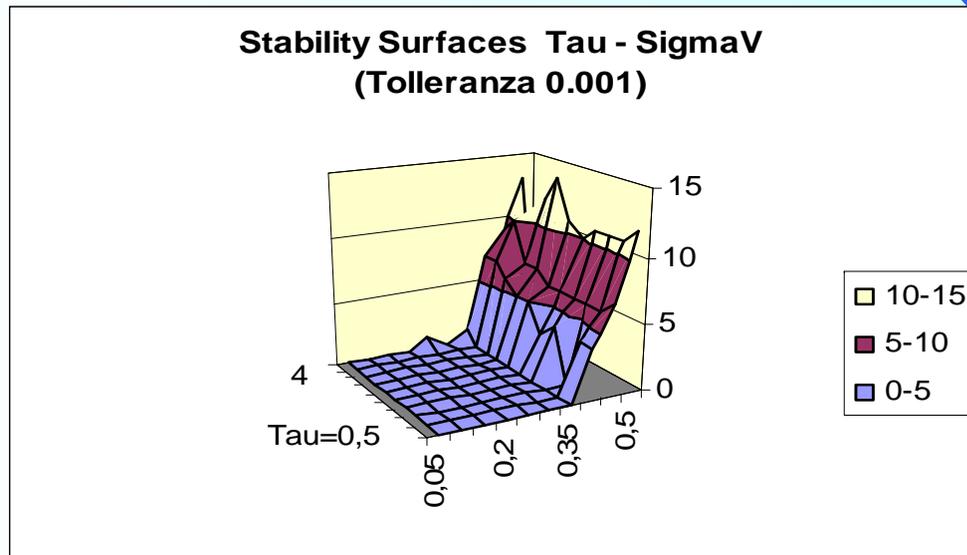


Bakshi – Cao - Chen

Soltanto se riduciamo la tolleranza prevista fino al livello:

$$|C_{BCC}[QUAD8] - C_{BCC}[NAG]| \geq 0.001$$

E' possibile notare una crescita dell'instabilità (secondo il nuovo criterio) al variare dei parametri



Non sempre il nuovo criterio riesce a definire un'influenza significativa dei parametri, in quanto come precisione siamo al limite del “rumore di fondo” numerico di MATLAB



Il risultato soddisfacente in termini di stabilità comunque **NON** sorprende, visto che il nuovo modello utilizza **5** parametri aggiuntivi



E' immediato chiedersi se questa “**overparametrization**” si sconti in fase di calibrazione del modello sui dati di mercato

Problema di Calibrazione Classico

Metodo SSE (Sum of Squared Pricing Errors)

$$SSE(t) = \min_{v(t), \Phi} \sum_{n=1}^N [C_{MERCATO}(X_n, \tau_n, S) - C_{BCC}(X_n, \tau_n, S)]^2$$

con $\Phi = \Phi(\lambda, \mu_J, \sigma_J, \kappa_v, \theta_v, \sigma_v, \rho, \kappa_r, \theta_r, \sigma_r)$

Problema di Ottimizzazione Non Lineare a 10 Parametri

2 differenti algoritmi di minimizzazione



NAG – E04FDF

Minimizzazione della
somma dei quadrati
degli scarti (Standard)



NAG – E04GCF

Minimizzazione attraverso i
movimenti del vettore
gradiente dei quadrati degli
scarti (necessita derivate in
forma analitica)

Principali problemi derivanti da un implementazione effettiva su **MATLAB** di una calibrazione **SSE** del modello BCC

- Difficoltà computazionali elevate (l'algoritmo non chiude con successo l'ottimizzazione, o non lo fa in tempi sensati)
- Elevatissima probabilità per l'algoritmo di ottimizzazione di imbattersi in un minimo locale
- Nonsense finanziario per i valori calibrati dei parametri

Problema di calibrazione **SSE**: Alcune Annotazioni Operative

- un'opportuna riscrittura della formula risolutiva, tale da evitare il calcolo di scomodi logaritmi, aiuta l'algoritmo di quadratura ad evitare calcoli di quantità vicine allo 0 ovvero molto grandi che conducono a prezzi instabili (riscrittura BCC)
- possibilità di rendere più efficiente il calcolo attraverso una suddivisione della complessa formula risolutiva in distinte subroutines che si occupano dei vari calcoli parziali; tale efficienza consistente in un miglioramento di quasi il **40%** della velocità computazionale ha come controindicazione il **deterioramento** della precisione del pricing

Greche di Bakshi, Cao, Chen – Principali Outlines

- La struttura additiva nelle diverse componenti (Volatilità, Tasso di interesse, Jump) della formula risolutiva BCC ed alcune ipotesi di fondo eliminano qualsiasi interessante interrelazione non lineare tra i nuovi parametri e quelli del “sottomodello” Heston;
- L’impatto dei parametri relativi al processo del tasso di interesse è molto basso, tale da risultare quasi trascurabile. Le influenze incrociate con gli altri parametri appaiono privi di una chiara intelligibilità;
- I nuovi parametri legati al processo di Jump sono invece incisivi nella determinazione del prezzo; le Greche relative a tali parametri hanno segno positivo ed i Gamma parametrici positivi sono indice di un’influenza crescente sul prezzo del derivato;

Ulteriori Sviluppi Possibili

Sfruttare la struttura additiva della formula per una calibrazione disgiunta delle due componenti, utilizzando delle informazioni aggiuntive, ottenute sulla base di stime storiche, al fine di ricavare così un vettore iniziale di partenza “ragionevole”

Passare a modelli a struttura affine più complessa, che incorporino salti discontinui nel processo di varianza

Abbandonare l’ambiente MATLAB per evitarne le limitazioni intrinseche