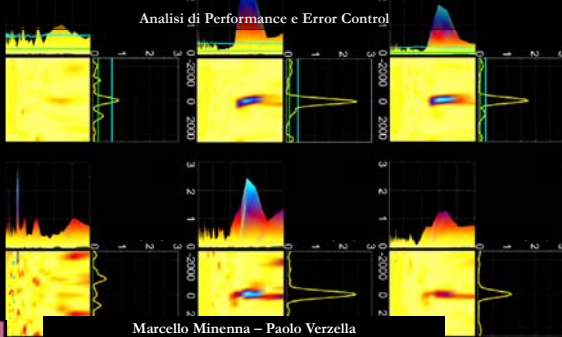


Il pricing veloce delle componenti derivate:

DFT su griglie gaussiane



Marcello Minenna – Paolo Verzella
IX WORKSHOP ON QUANTITATIVE FINANCE
January 24-25, 2008
University of Rome "Tor Vergata"



Indice della presentazione

L'Option Pricing via DFT

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

L'Option Pricing Veloce

- FFT
- FFT Non Uniforme
 - L'algoritmo interpolante "Gaussian Gridding"
 - Analisi di Performance: Velocità, Stabilità, Accuratezza

Conclusioni

2



Indice della presentazione

L'Option Pricing via DFT

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

3



Il Pricing via FT

Call Europea $C_t = f_2(\ln S_T, \xi | \ln S_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi \ln S_T} q_2(\ln S_T | \ln S_0) d \ln S_T$
 Prezzo Spot S_t sotto la misura neutrale al rischio



Una trasformazione lineare dallo Spazio di Fourier



4



Il Pricing via FT

Call Europea $C_t = f_2(\ln S_T, \xi | \ln S_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi \ln S_T} q_2(\ln S_T | \ln S_0) d \ln S_T$
 Prezzo Spot S_t sotto la misura neutrale al rischio



Una trasformazione lineare dallo Spazio di Fourier



$$C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left(e^{i\xi \ln K} \frac{e^{-rT} f_2(\xi - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha + 1)\xi} \right) d\xi$$

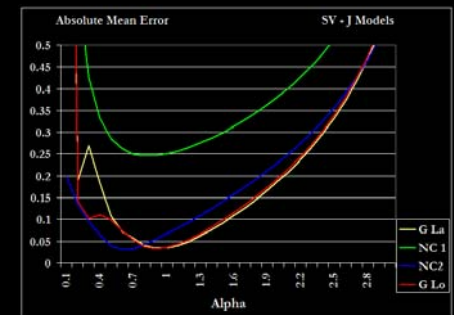
5



Il Pricing via FT

Accuratezza

Errore Medio Assoluto calcolato rispetto ad α su uno spazio (σ, τ)



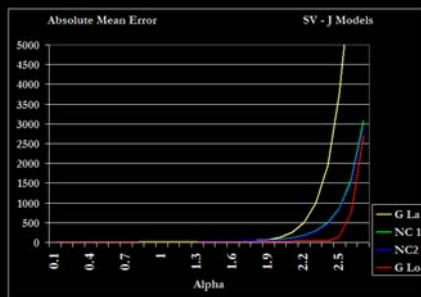
6



Il Pricing via FT

Stabilità

Errore Medio Assoluto calcolato rispetto ad α su uno spazio (σ, τ) esteso



7



Indice della presentazione

L'Option Pricing via DFT

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

8



Convergenze DFT - FT

Data la DFT Generalizzata

$$\omega(m) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{N} x_j (m-1)} f(x_j) \quad \text{where } m = 1, 2, \dots, M$$

9



Data la DFT Generalizzata

$$\omega(m) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{X} x_j (m-1)} f(x_j) \quad \text{where } m = 1, 2, \dots, M$$

$M \neq N$

Il Teorema di Convergenza per la DFT generalizzata (C Th)

$$\mathcal{F}[f(x)](t_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{X} x_j (m-1)} f(x_j, X)$$

$$t_m = \frac{2\pi}{X} (m-1)$$



Indice della presentazione

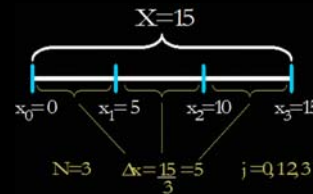
L'Option Pricing via DFT

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

Convergenze su Griglie Uniformi

Condizione 1

Griglia di Discretizzazione Uniforme



Convergenze su Griglie Uniformi

Condizione 2

$N=M$

DFT specializzata

$$\omega(n) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{X} x_j (n-1)} f(x_j) \quad \text{where } n=1, 2, \dots, N$$

Convergenze su Griglie Uniformi

Condizione 1

Condizione 2



DFT classica

$$\omega(n) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{N} j(n-1)} f(x_j) \quad \text{where } n = 1, 2, \dots, N$$

Convergenze su Griglie Uniformi

Limite di Nyquist - Shannon (N-S)

$$\mathcal{F}[f(x)](t_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{X}{N} \omega(n)$$

$$\{t_n\}_{n=1 \dots \frac{N}{2}} \quad \text{for } N \text{ even}$$

$$\{t_n\}_{n=1 \dots \frac{N+1}{2}} \quad \text{for } N \text{ odd}$$

Convergenze su Griglie Uniformi

$$C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left(e^{i \xi \ln K} \frac{e^{-\tau \xi} f_0(\xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} \right) d\xi$$



Griglia di Discretizzazione Uniforme per f

1. $f(v_{j-1}) = e^{-i(j-1)\eta[\ln S_r - b]} \psi_0((j-1)\eta)$
2. $f(v_{j-1}) = e^{-i(j-1)\eta[\ln S_r - b]} \psi_0((j-1)\eta) \cdot (3 + (-1)^j - \delta_{j-1})$

$$1. C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left(e^{i \xi \ln K} \frac{e^{-r \xi} f_2(\xi - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha + 1)\xi} \right) d\xi$$

$$f(v_{j-1}) = e^{-i(j-1)\eta[\ln S_T - b]} \psi_0((j-1)\eta)$$

N-S

$$C_0[\ln K]_u^- \approx \frac{e^{-\alpha[\ln S_T - b + \lambda(u-1)]}}{b} \cdot \Re(\omega(u))$$

$$2. C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K}}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left(e^{i \xi \ln K} \frac{e^{-r \xi} f_2(\xi - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha + 1)\xi} \right) d\xi$$

$$f(v_{j-1}) = e^{-i(j-1)\eta[\ln S_T - b]} \psi_0((j-1)\eta) \cdot (3 + (-1)^j - \delta_{j-1})$$

N-S

$$C_0[\ln K]_u^- \approx \frac{e^{-\alpha[\ln S_T - b + \lambda(u-1)]}}{3b} \cdot \Re(\omega(u))$$

Teorema di Equivalenza



Il prezzo della Call calcolato via Teorema di Convergenza è uguale al prezzo della Call calcolato via Trapezoid/Simpson Quadrature

Indice della presentazione

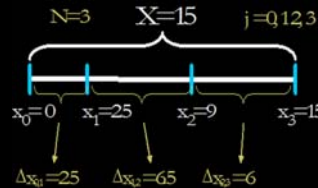
L'Option Pricing via DFT

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

Convergenze su Griglie Non Uniformi

Condizione 1

Griglie di Discretizzazione Non Uniformi



Convergenze su Griglie Non Uniformi

Condizione 1

Griglie Gaussiane



Scelta Ottimale dei punti di discretizzazione



Gauss Laguerre



Gander Gautschi

Convergenze su Griglie Non Uniformi

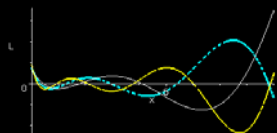
Condizione 1

Griglie Gaussiane



Scelta Ottimale dei punti di discretizzazione

Gauss Laguerre



Zero di Polinomi di Laguerre

Convergenze su Griglie Non Uniformi

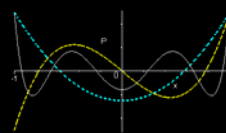
Condizione 1

Griglie Gaussiane



Scelta Ottimale dei punti di discretizzazione

Gauss Lobatto



Zero di Polinomi di Legendre

Convergenze su Griglie Non Uniformi

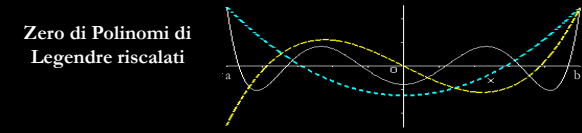
Condizione 1

Griglie Gaussiane



Scelta Ottimale dei punti di discretizzazione

Gander Gautschi



Zero di Polinomi di Legendre riscaliati

Condizione 2

N≠M



DFT Generalizzata

$$\omega(m) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i \frac{2\pi}{X} x_j (m-1)} f(x_j) \quad \text{dove } m=1,2,\dots,M$$

Il Teorema di Convergenza per la DFT generalizzata (C Th)



$$\mathcal{F}[f(x)](t_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{X} x_j (m-1)} f(x_j, X)$$

$$t_m = \frac{2\pi}{X} (m-1)$$

$$C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K} + \infty}{\pi} \int_0^{\infty} \Re \left(e^{i \ell \ln K} \frac{e^{-rT} f_2(\xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} \right) d\xi$$



Griglie Gaussiane per f

$$1. f(v_{j-1}) = e^{[1+i(\frac{M}{\sigma} - \ln S_t)]v_{j-1}} \psi_0(v_{j-1}) \frac{1}{L_{N+1}(v_{j-1})L'_N(v_{j-1})}$$

$$2. f(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1})) = \left[e^{-i(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1}))[\ln S_t - \frac{M}{\sigma}]} \psi_0(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1})) \right] \frac{1}{[P_{N-1}(v_{j-1})]^2}$$

$$1. C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K} + \infty}{\pi} \int_0^{\infty} \Re \left(e^{i \ell \ln K} \frac{e^{-rT} f_2(\xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} \right) d\xi$$

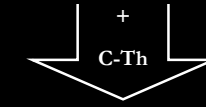
$$f(v_{j-1}) = e^{[1+i(\frac{M}{\sigma} - \ln S_t)]v_{j-1}} \psi_0(v_{j-1}) \frac{1}{L_{N+1}(v_{j-1})L'_N(v_{j-1})}$$



$$C_0([\ln K]_u^*) \approx -\Re \left[\frac{e^{-a(\ln S_t - \frac{M}{\sigma} - \frac{r}{2\sigma}(t-1))}}{\pi} \frac{1}{N+1} \cdot \omega^*(u) \right]$$

$$2. C_0 = \frac{e^{-\alpha \ln K} + \infty}{\pi} \int_0^{\infty} \Re \left(e^{i \ell \ln K} \frac{e^{-rT} f_2(\xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} \right) d\xi$$

$$f(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1})) = \left[e^{-i(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1}))[\ln S_t - \frac{M}{\sigma}]} \psi_0(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1})) \right] \frac{1}{[P_{N-1}(v_{j-1})]^2}$$



$$C_0([\ln K]_u^*) \approx \Re \left[\frac{e^{-a(\ln S_t - \frac{M}{\sigma} - \frac{r}{2\sigma}(t-1))}}{\pi} \frac{1}{M(N-1)} \cdot \omega^*(\frac{1}{2}a(1+v_{j-1})) \right]$$

Teorema di Equivalenza



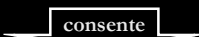
Il prezzo della Call calcolato via Teorema di Convergenza è uguale al prezzo della Call calcolato via Gauss Laguerre/Gander Gautschi Quadrature

Indice della presentazione

- **L'Option Pricing via DFT**
 - Formule per il prezzo di un derivato via FT
 - Convergenze della DFT alla FT
 - Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
 - Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane
- **L'Option Pricing Veloce**
 - FFT
 - FFT Non Uniforme
 - L'algoritmo interpolante "Gaussian Gridding"
 - Analisi di Performance: Velocità, Stabilità, Accuratezza
- **Conclusioni**

L'Option Pricing Veloce

\vec{C}_i via DFT



Algoritmi
Fast Fourier Transform

L'Option Pricing Veloce

\vec{C}_i via DFT



FFT Uniforme

\vec{C}_i via DFT



FFT Non Uniforme

•L'Option Pricing via DFT

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

• **L'Option Pricing Veloce**

- **FFT**
- **FFT Non Uniforme**
 - L'algorithmo interpolante "Gaussian Gridding"
 - Analisi di Performance: Velocità, Stabilità, Accuratezza

• Conclusioni

Caratterizzazione della DFT di Cooley - Tukey



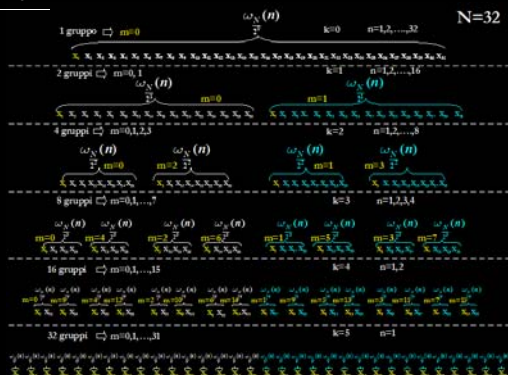
$$\omega_2^m(n) = f(x_m) + W_2^{(n-1)} f(x_{m+N/2}) \quad \text{for } n = 1, 2$$



Iterando dal basso verso l'alto per N passi



Si ottiene l'algorithmo FFT di Cooley - Tukey



Algorithmo FFT di Cooley - Tukey



Il costo computazionale della DFT si riduce

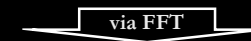


$$O(N^2)$$



$$O(N \log_2 N)$$

Dato il Limite di Nyquist - Shannon, le formule di prezzo



forniscono prezzi accurati

SOLO

intorno alla Frequenza di Nyquist

Dato il Limite di Nyquist - Shannon, le formule di prezzo



forniscono prezzi accurati

SOLO

intorno alla Frequenza di Nyquist



All'incirca il 25% dei prezzi può essere accettato

•L'Option Pricing via DFT

- Formule per il prezzo di un derivato via FT
- Convergenze della DFT alla FT
- Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
- Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane

• **L'Option Pricing Veloce**

- **FFT**
- **FFT Non Uniforme**
 - L'algorithmo interpolante "Gaussian Gridding"
 - Analisi di Performance: Velocità, Stabilità, Accuratezza

• Conclusioni

Gaussian Gridding

Gaussian Gridding



Step 1

Convoluzione Gaussiana della funzione caratteristica non uniformemente campionata

Gaussian Gridding



Step 1

Convoluzione Gaussiana della funzione caratteristica non uniformemente campionata

Gaussian Gridding



Step 1

Convoluzione Gaussiana della funzione caratteristica non uniformemente campionata

$$f_{\tau}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_j-x-2k\tau)^2}{4\tau}}$$

Gaussian Gridding

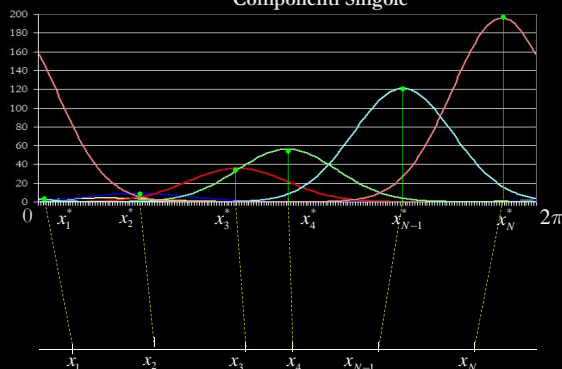


Step 1

Convoluzione Gaussiana della funzione caratteristica non uniformemente campionata

$$f_{\tau}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_j-x-2k\tau)^2}{4\tau}}$$

Componenti Singole



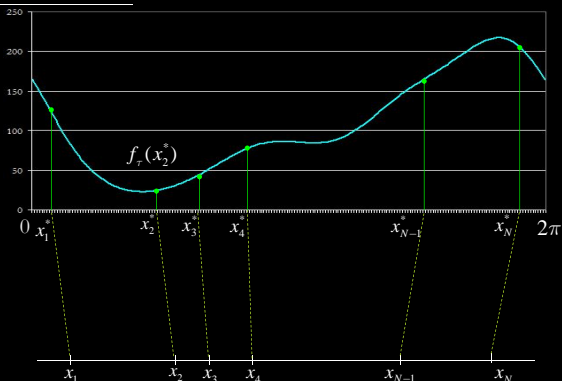
Gaussian Gridding



Step 1

Convoluzione Gaussiana della funzione caratteristica non uniformemente campionata

$$f_{\tau}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_j-x-2k\tau)^2}{4\tau}}$$



Gaussian Gridding



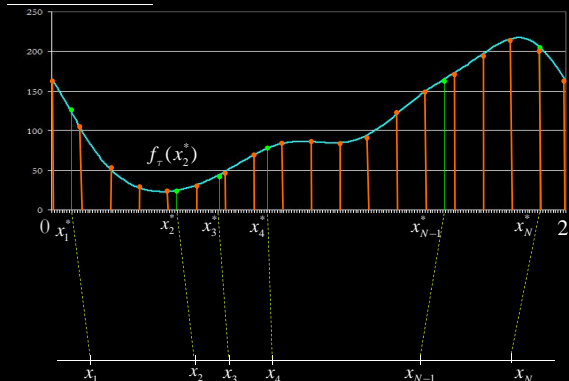
Step 2

Discretizzazione su una griglia uniforme sovracampionata $f_{\tau}(x)$

$$\tilde{f}_{\tau}(y_m) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) \tilde{K}(y_m, x_j, \sqrt{2\tau}; 2\pi)$$

dove

$$\tilde{K}(y_m, x_j, \sqrt{2\tau}; 2\pi) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_j - y_m - 2k\tau)^2}{4\tau}} & \text{se } y_m \text{ appare} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_j - y_m - 2k\tau)^2}{4\tau}} & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Gaussian Gridding



Step 3

Calcolo del Coefficiente di Fourier $f_\tau(x)$ discretizzato



$$F_\tau(n) = \lim_{M_\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{M_\tau} \sum_{m=0}^{M_\tau-1} \tilde{f}_\tau \left(m \frac{2\pi}{M_\tau} \right) e^{-im \frac{2\pi}{M_\tau} (n-1)}$$

Gaussian Gridding



Step 4

Rappresentazione NU-DFT del Coefficiente di Fourier $F_\tau(n)$



$$\tilde{\omega}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{n^2 \tau} F_\tau(n)$$

Gaussian Gridding



Step 5

Rappresentazione DFT del Coefficiente di Fourier $F_\tau(n)$



$$F_\tau(n) = \lim_{M_\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{M_\tau} \omega(n)$$

per $n = 1, 2, \dots, \frac{M_\tau}{2}$

Gaussian Gridding



Step 6

Derivazione della NU-DFT come una funzione della DFT

Gaussian Gridding



Step 6

Derivazione della NU-DFT come una funzione della DFT

$$F_\tau(n) = \lim_{M_\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{M_\tau} \omega(n)$$

$$\tilde{\omega}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{n^2 \tau} F_\tau(n)$$

$$\tilde{\omega}(n) = \lim_{M_\tau \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{\tau^*}} e^{n^2 \tau^*} \frac{1}{M_\tau} \omega(n)$$

per $n = 1, 2, \dots, \frac{M_\tau}{2}$

Gaussian Gridding



Step 7

Calcolo NU-FFT

Gaussian Gridding



Step 7

Calcolo NU-FFT



$$\tilde{\omega}(n) = \lim_{M_\tau \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{\tau^*}} e^{n^2 \tau^*} \frac{1}{M_\tau} \omega(n)$$

FFT

Gaussian Gridding



Step 7

Calcolo NU-FFT



$$\tilde{\omega}(n) = \lim_{M_\tau \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{\tau^*}} e^{n^2 \tau^*} \frac{1}{M_\tau} \omega(n)$$

NU-FFT

FFT

Costo Computazionale



Costo Computazionale

Il maggior costo computazionale della procedura è la FFT su griglia sovracampionata

Costo Computazionale

Il maggior costo computazionale della procedura è la FFT su griglia sovracampionata

scegliendo il rapporto di sovracampionatura

$$M_{\tau} = 2M$$

Costo Computazionale

Il maggior costo computazionale della procedura è la FFT su griglia sovracampionata

scegliendo il rapporto di sovracampionatura

$$M_{\tau} = 2M$$

Il costo totale della procedura è $\approx 2M \log 2M$

Indice della presentazione

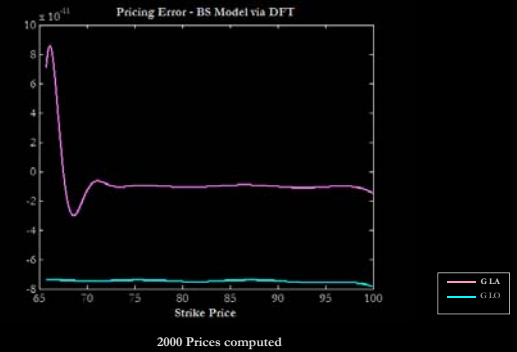
- L'Option Pricing via DFT
 - Formule per il prezzo di un derivato via FT
 - Convergenze della DFT alla FT
 - Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
 - Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane
- L'Option Pricing Veloce
 - FFT
 - **FFT Non Uniforme**
 - L'algoritmo interpolante "Gaussian Gridding"
 - **Analisi di Performance: Velocità, Stabilità, Accuratezza**
- Conclusioni

Analisi di Performance

ACCURATEZZA



Analisi di Performance



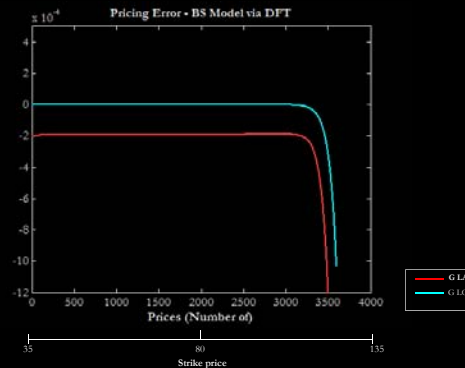
2000 Prices computed

Analisi di Performance

STABILITA'



Analisi di Performance



Strike price

Analisi di Performance

STABILITA'

L'errore del 90% dei prezzi calcolati ricade entro

STABILITA'

L'errore del **90%** dei prezzi calcolati ricade entro

10^{-3}

L'INTERVALLO DI PRECISIONE



VELOCITA'

VELOCITA'

lo schema NU – FFT è all'incirca **2** volte più lento di FFT

VELOCITA'

Per tempi minimi, le differenze **scompaiono**

VELOCITA'

Per tempi minimi, le differenze **scompaiono**

FFT	NC2	G-LA	G-LO
	0.01 sec.	N/A	N/A
NU – FFT	NC2	G-LA	G-LO
	0.02 sec.	0.0261 sec.	0.0301 sec.

Calcolo di 4000 prezzi su un Centrino 1600Mhz – 2gb RAM
Valore medio su 1000 run

- L'Option Pricing via DFT
 - Formule per il prezzo di un derivato via FT
 - Convergenze della DFT alla FT
 - Teoremi di Convergenza su Griglie Uniformi
 - Teoremi di Convergenza su Griglie Non Uniformi Gaussiane
- L'Option Pricing Veloce
 - FFT
 - FFT Non Uniforme
 - L'algoritmo interpolante "Gaussian Gridding"
 - Analisi di Performance: Velocità, Stabilità, Accuratezza
- **Conclusioni**

- **NU – FFT** permette l'uso di Griglie Gaussiane

- NU – FFT permette l'uso di Griglie Gaussiane
- **NU – FFT** è indifferente al limite di Nyquist - Shannon

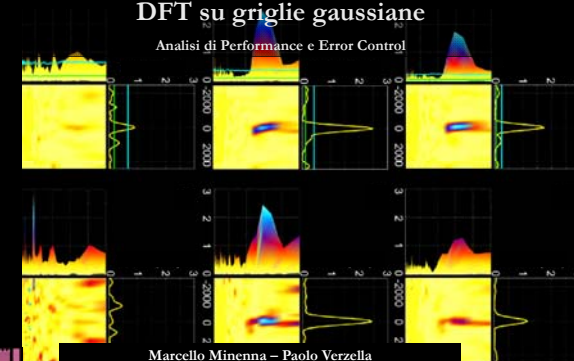
- NU – FFT permette l'uso di Griglie Gaussiane
- NU – FFT è indifferente al limite di Nyquist - Shannon
- **NU – FFT** è accurato almeno quanto FFT

- NU – FFT permette l'uso di Griglie Gaussiane
- NU – FFT è indifferente al limite di Nyquist - Shannon
- NU – FFT è accurato almeno quanto FFT
- **NU – FFT è più stabile di FFT**

- NU – FFT permette l'uso di Griglie Gaussiane
- NU – FFT è indifferente al limite di Nyquist - Shannon
- NU – FFT è accurato almeno quanto FFT
- NU – FFT è più stabile di FFT
- **NU – FFT è veloce tanto quanto FFT classico**

Il pricing veloce delle componenti derivate: DFT su griglie gaussiane

Analisi di Performance e Error Control



Marcello Minenna – Paolo Verzella
IX WORKSHOP ON QUANTITATIVE FINANCE
January 24-25, 2008
University of Rome "Tor Vergata"