CONSOB

COMMISSIONE NAZIONALE
PER LE SOCIETÀ E LA BORSA

QUADERNI
DI
FINANZA

STUDI E RICERCHE

L'INDIVIDUAZIONE DI FENOMENI DI ABUSO DI MERCATO NEI MERCATI FINANZIARI: UN APPROCCIO QUANTITATIVO

M. MINENNA

N. 54 - MAGGIO 2003

I *Quaderni di Finanza* hanno lo scopo di promuovere la diffusione dell'informazione e della riflessione economica sui temi relativi ai mercati mobiliari ed alla loro regolamentazione.

Nella collana «Studi e Ricerche» vengono pubblicati i lavori di ricerca prodotti o promossi dalla Consob; nella collana «Documenti» trovano spazio gli interventi istituzionali e gli atti di convegni.

Quaderni di Finanza
Autorizzazione del Tribunale di Roma n. 432 del 4-7-1990
Consob : Via G.B. Martini, 3 - 00198 Roma
Tel.: 06.8477462 - Fax: 06.8477612
e-mail: quaderni_finanza@consob.it

L'individuazione di fenomeni di abuso di mercato nei mercati finanziari: un approccio quantitativo

Marcello Minenna *

Parole Chiave: insider trading, manipolazione di mercato, abnormal return, individuazione di abusi di mercato, allertatore, processo diffusivo.

Sintesi In tutti i Paesi in cui esiste una normativa sui fenomeni di abuso di mercato, vale a dire manipolazione e *insider trading*, la repressione degli stessi è affidata alla Autorità di Vigilanza e alla Autorità Giudiziaria con competenze che variano in relazione alle diverse legislazioni. La definizione di una procedura che consenta l'individuazione in tempo reale di fenomeni di abuso di mercato nei mercati finanziari rappresenta una esigenza fortemente avvertita da parte delle Autorità di Vigilanza dei mercati finanziari. Una procedura per l'individuazione di abusi di mercato consiste fondamentalmente nell'analisi delle transazioni effettuate sul mercato da diversi agenti al fine di individuare delle anomalie che potrebbero essere sintomatiche di fenomeni di abuso di mercato. L'obiettivo di questo lavoro è di sviluppare, con l'ausilio della teoria della probabilità, una metodologia che permetta di individuare i fenomeni di abuso di mercato in maniera più efficace.

---

* L'autore desidera ringraziare Emilio Barucci (Università di Pisa) per l'insostituibile supporto offerto nella ricerca e nell'analisi della bibliografia nonché per i proficui commenti e suggerimenti relativi allo sviluppo della modellistica quantitativa sottesa alla procedura per l'individuazione di abusi di mercato. Inoltre, ringrazia: Veronica Faralli (CORIPE) e Maddalena Lenzi (Consob) per la continua ri-elaborazione dei dati in relazione alle diverse soluzioni quantitative approntate funzionale alla calibrazione della procedura per l'individuazione degli abusi di mercato, Luca Doveri (CORIPE) e Enrico Maria Scurati per le analisi necessarie allo sviluppo degli indicatori sulla concentrazione di mercato, Giovanni Portioli, Paola Deriu e Carlo Milia (Consob) per la raccolta dei dati e delle informazioni che hanno consentito la verifica empirica della procedura.

Un ulteriore sentito ringraziamento a Luigi Spaventa, Claudio Salini (Consob) e Francesco Tuccari per aver stimolato lo sviluppo di questa procedura nella convinzione che l'analisi quantitativa possa concretamente supportare l'attività di vigilanza. Per gli sviluppi matematici riportati nell'appendice A, l'autore ringrazia per i validi suggerimenti offerti Mavira Mancino (Università di Firenze) con riferimento alla sezione A2 ed Ennio Arlandi (FINARM) per la sezione A1.

Introduzione

In tutti i Paesi in cui esiste una normativa sui fenomeni di abuso di mercato, vale a dire manipolazione e *insider trading*, la repressione degli stessi è affidata alla Autorità di Vigilanza e alla Autorità Giudiziaria. A seconda della legislazione in vigore nel Paese, l'Autorità di Vigilanza ha competenze più o meno estese sull'investigazione e sulla repressione di questi fenomeni. Per una analisi dei diversi quadri giurisdizionali in Europa e nel mondo si rinvia alla bibliografia [Minenna, 2001].

La manipolazione dell'andamento di un titolo su un mercato finanziario (c.d. aggiotaggio) è finalizzata a cambiarne il prezzo, oppure la percezione del valore fondamentale del titolo da parte degli agenti sul mercato. Questo comportamento può essere attuato secondo due modalità: la manipolazione operativa (c.d. *market based manipulation)* e la manipolazione informativa (c.d. *information based manipulation).* La prima forma di manipolazione si realizza direttamente sui mercati finanziari attraverso l'effettuazione di operazioni di negoziazione (anche simulate). La seconda consiste invece nella diffusione di informazioni false o tendenziose relative alla società emittente i titoli quotati sui mercati finanziari.

L'*insider trading* consiste nella operatività di soggetti sui mercati finanziari finalizzata allo sfruttamento di informazioni non ancora di pubblico dominio (c.d. informazione privilegiata o anche *insider information*) e che, se diffuse sul mercato, determinerebbero una variazione di prezzo dei titoli.

Sulla base di queste definizioni si evidenziano di seguito con maggiore dettaglio gli elementi che distinguono le due diverse condotte di abuso di mercato.

Il confronto tra le finalità di una condotta manipolativa rispetto ad una di *insider trading*, in una prospettiva di massimizzazione dei profitti per l'agente, evidenzia una prima differenza: un'agente che manipola l'andamento di un titolo (c.d. *market manipulator* o anche semplicemente *manipulator*) può avere interesse a rendere manifesta sul mercato la propria condotta, mentre un agente che effettua transazioni con la finalità di sfruttare il valore di una informazione privilegiata (c.d. *insider trader* o anche semplicemente *insider*) cerca di non rendere percepibile la propria presenza sul mercato. Questo differente comportamento implica che l'*insider trader* a differenza di un *market manipulator* operi da *price taker*. Una seconda differenza è che l'*insider trading* è sempre fondato sullo sfruttamento di un'informazione privilegiata, mentre l'aggiotaggio non lo è necessariamente. Una ulteriore differenza è che gli *insider* operano sempre nella direzione che il valore dell'informazione in loro possesso determina nell'andamento dei prezzi del titolo, mentre per i *manipulator* la direzione dell'operatività non è univoca ed è comunque collegata alla tipologia di condotta manipolativa.

La definizione di una procedura che consenta l'individuazione di fenomeni di abuso di mercato nei mercati finanziari rappresenta una esigenza fortemente avvertita da parte delle Autorità di Vigilanza. Questa tematica, denominata di *Market Abuse Detection* (c.d. M.A.D.)*,* nel gergo delle Autorità di Vigilanza, è stata sostanzialmente ignorata nella letteratura finanziaria, anche per la difficoltà di accedere ai *data set* informativi sulle transazioni effettuate dai diversi agenti sui mercati che le Autorità hanno a disposizione.

L'obiettivo di questo lavoro è di costruire una procedura di individuazione di abusi di mercato che per ogni titolo e su base giornaliera sia in grado di individuare la potenziale presenza di fenomeni di abuso di mercato.

La procedura, sulla base delle informazioni sulle negoziazioni disponibili presso una Autorità di Vigilanza, dovrebbe verificare per ciascun titolo la presenza di una qualche anomalia di mercato (c.d. *failure*). A tal fine, la metodologia individua per le diverse variabili finanziarie, che compongono il flusso informativo di negoziazione del titolo, un modello di riferimento che permetta di individuare un indicatore fondato su soglie dinamiche (c.d. allertatore), il cui superamento sia indicativo di un andamento anomalo della variabile esaminata (c.d. *alert)*. Le variabili finanziarie analizzate sulla base del relativo modello di riferimento diventano, quindi, una serie di allertatori che segnalano la potenziale presenza di fenomeni di abuso di mercato.

L'individuazione degli allertatori della procedura di M.A.D. è stata realizzata analizzando ciò che la teoria dei mercati finanziari, l'esperienza di vigilanza e l'osservazione empirica dei diversi fenomeni di abuso di mercato rilevati dalla Consob, suggeriscono in relazione allo studio dell'andamento delle diverse variabili che compongono il flusso informativo di negoziazione dei titoli sui mercati finanziari.

Individuati gli allertatori, la calibrazione di una procedura di M.A.D. consiste nella calibrazione dei modelli di riferimento degli stessi, vale a dire nella loro specificazione parametrica in chiave previsionale, e nella individuazione di un algoritmo che consenta una interpretazione congiunta dei diversi *alert*.

L'osservazione dei fenomeni di *insider trading* e di aggiotaggio rilevati dalla Consob ha garantito una verifica empirica preziosa per la calibrazione della procedura di M.A.D..

Il lavoro si suddivide in due parti. Una prima parte costituita da una rassegna della letteratura finanziaria e della esperienza di vigilanza, ove si identificano elementi utili alla costruzione degli allertatori (vedi par. 1). Una seconda parte ove si illustra la procedura di M.A.D. sviluppata, si descrivono dettagliatamente i diversi allertatori alla base della procedura e si spiega come avviene la calibrazione della procedura stessa (vedi par. 2).

1 Rassegna della letteratura e della esperienza di vigilanza

Una procedura di individuazione di abusi di mercato si fonda sull'analisi delle negoziazioni sui titoli che i diversi agenti effettuano nei mercati finanziari. I flussi informativi elementari che caratterizzano una negoziazione sono i prezzi, le quantità e la denominazione degli agenti che hanno effettuato la transazione.

In questa sezione si presenta una analisi della letteratura finanziaria e della esperienza di vigilanza della Consob, finalizzata ad evidenziare come tali flussi informativi elementari possano essere elaborati per costruire le variabili finanziarie utili a definire gli allertatori del modello. In particolare, vengono esaminati la:

1. teoria dei mercati efficienti con informazioni omogenee tra gli agenti (c.d. teoria classica dell'*asset pricing*);

2. teoria dei mercati finanziari in presenza di informazione eterogenea o asimmetrica;

3. letteratura sugli effetti sul mercato finanziario dell'attività di *insider trading* e manipolazione.

Con riferimento a questo ultimo filone teorico sono state analizzate tre tematiche: il contenuto informativo degli scambi di mercato degli *insider trader* per inferire i rendimenti futuri dei titoli [Minenna, 2001, Seyhun, 1998], la stima del valore economico dell'informazione privilegiata, quale variabile *proxy* per il calcolo degli *abnormal return* conseguiti dagli *insider trader* [Minenna, 2002], la capacità del mercato di "leggere" le *insider information* e, quindi, dei prezzi di incorporarne il valore prima che le stesse siano rese pubbliche [Meulbroek, 1992, Chackravarty, 1999, Cornell e Sirri, 1992, Bhattacharya et al., 2000].

Si rimanda alla bibliografia per una puntuale analisi della letteratura a cui si fa riferimento nella presente sezione [Barucci, 2002] e per un esame dell'esperienza di vigilanza [Tuccari, 1999].

1.1 Alcuni spunti teorici: teoria classica dell'asset pricing

Alcuni risultati afferenti la teoria classica dell'*asset pricing* (agenti con informazioni omogenee) hanno evidenziato come i diversi flussi informativi elementari che caratterizzano le negoziazioni su un titolo possano essere sintetizzati in maniera efficace attraverso due variabili finanziarie: il rendimento e il volume di negoziazione. L'analisi di questo filone teorico, funzionale all'individuazione di un *set* di allertatori utili per la definizione di una procedura di M.A.D., è stata pertanto condotta con riferimento a queste due variabili finanziarie.

1.1.1 Il rendimento

La teoria classica dell'*asset pricing* si basa su ipotesi già ampiamente sperimentate nella teoria economica: mercati perfettamente concorrenziali, mercati completi (è possibile scambiare sul mercato finanziario ricchezza contingente ad ogni evento futuro), agenti che massimizzano una funzione obiettivo (utilità attesa), aspettative razionali (gli agenti sono neutrali al rischio). Qualora i mercati siano in equilibrio e non vi siano opportunità di arbitraggio, è stato dimostrato che esiste una misura di probabilità equivalente, detta neutrale al rischio, tale che i rendimenti uniperiodali attesi condizionati dei titoli-portafogli siano pari al rendimento del titolo privo di rischio. Rispetto a questa misura di probabilità neutrale al rischio, deriva che:

- non esiste una strategia di investimento che genera rendimenti attesi superiori a quello del portafoglio di mercato o della *buy&hold strategy*;

- il prezzo di un titolo e la ricchezza generata da una strategia di investimento scontati o una loro trasformata sono un processo diffusivo che ha la proprietà di essere una martingala;

- i rendimenti in eccesso (rendimento del titolo al netto del rendimento del titolo privo di rischio) non sono autocorrelati e le informazioni disponibili nel presente non permettono di prevedere i rendimenti futuri.

Queste caratteristiche sono riassunte nel fatto che il logaritmo del prezzo di un titolo che non distribuisce dividendi segue un processo stocastico detto *random walk*.

È facile immaginare lo scarso realismo di queste ipotesi (neutralità al rischio e costanza nel tempo delle preferenze degli agenti) e, quindi, il modesto aiuto che questi risultati offrono per comprendere l'andamento del rendimento di un titolo.

Rilasciando l'ipotesi di agenti neutrali al rischio, le implicazioni della teoria dell'*asset pricing* si fanno maggiormente articolate. Si osserva che la misura di probabilità neutrale al rischio non coincide più con quella storica (quella ricavata dai dati osservati sul mercato). Inoltre, la dinamica del rendimento atteso condizionato di un titolo cessa di corrispondere con quella del rendimento privo di rischio. Tale dinamica è analizzata in letteratura mettendo in relazione il rendimento di un titolo con alcune variabili di stato che descrivono il mutamento delle opportunità di investimento e le preferenze degli agenti. In particolare, nell'ipotesi di mercati completi, in relazione alla variabile di stato utilizzata per descrivere la dinamica del rendimento di un titolo, i modelli teorici di riferimento sono il CCAPM (Consumption Capital Asset Pricing Model) [Rubinstein, 1976] e il ICAPM (Investment Capital Asset Pricing Model) [Breeden 1979].

In un contesto di agenti non neutrali al rischio, pertanto, non vi è alcun motivo per attendersi l'assenza di autocorrelazione nei rendimenti dei titoli, nè per non riconoscere un valore previsivo dei rendimenti futuri ad alcune informazioni disponibili al tempo presente [Fama, 1991].

Nella letteratura più recente è stato osservato che i rendimenti di portafogli o di indici azionari sono caratterizzati da *mean reversion* su ampi orizzonti temporali (autocorrelazione negativa dei rendimenti) e da *trend* (*momentum effect*) su brevi orizzonti temporali (autocorrelazione positiva dei rendimenti).

Lehman e Jegadeesh hanno confermato tale presenza di autocorrelazione nei rendimenti settimanali dei titoli [Lehman, 1990, Jegadeesh, 1990].

Roll ha evidenziato che i rendimenti giornalieri dei singoli titoli risentono degli effetti dovuti alla microstruttura del mercato (ad esempio costi di transazione) che possono introdurre fenomeni di *mean reversion* di breve periodo [Roll, 1984]. In particolare, titoli poco liquidi, connotati da una modesta profondità di mercato, sono caratterizzati da una elevata *price pressure* e, quindi, i rendimenti possono cambiare di segno in un lasso di tempo contenuto.

Fama e French hanno evidenziato che un modello autoregressivo sui rendimenti presi in chiave logaritmica catturi sia la componente di *mean reversion* sia di *momentum effect* [Fama e French, 1988].

Forti di queste osservazioni, si può affermare che un indicatore interessante circa la dinamica di un titolo è fornito dalla autocorrelazione dei rendimenti o dal loro esame secondo una dinamica *mean reverting*. Un'anomalia in tale dinamica segnala il cambiamento delle opportunità di investimento e, quindi, della rischiosità di un titolo, l'insorgenza di un *break* strutturale o di un fenomeno di abuso di mercato. Considerata inoltre la naturale tendenza di un titolo ad essere caratterizzato da una componente di *mean reversion*, tendenza collegata inversamente alla liquidità del titolo, si osserva che un'esame congiunto dei rendimenti e dei volumi di negoziazione potrebbe essere di aiuto per discriminare tra le diverse ipotesi di *failure* del mercato.

1.1.2 Il Volume di negoziazione

In letteratura, si considera che gli agenti scambino titoli sul mercato finanziario per motivi:

- di *risk sharing-hedging*;
- speculativi.

L'operatività connessa al *risk sharing-hedging* è funzionale alla necessità degli agenti di ottenere copertura dal rischio finanziario sulle posizioni in essere.

I motivi speculativi sono invece collegati alla possibilità di conseguire dei profitti, anche in relazione alla disponibilità di set informativi eterogenei tra gli agenti.

Nella teoria classica dell'*asset pricing* queste motivazioni trovano scarsa trattazione; infatti, in presenza di mercati completi, l'operatività connessa al *risk sharing-hedging* trova spiegazione solo in un momento iniziale di mercato, generato da uno *shock* esogeno che in quanto tale determina un *break* strutturale nel mercato stesso. Questa operatività è infatti necessaria al raggiungimento di una allocazione Pareto ottima, raggiunta la quale per l'ipotesi di aspettative razionali non vi sarà motivo per alcun ulteriore scambio. L'operatività per motivi speculativi è esclusa a priori vista l'ipotesi di agenti con informazioni omogenee.

In questo contesto, pertanto, la letteratura non offre un'effettiva spiegazione degli elevati volumi osservati nei mercati finanziari e della forte componente autoregressiva degli stessi [Gallant et al., 1992].

Rilasciando l'ipotesi di completezza dei mercati, la mancanza di alcuni mercati e di specifici strumenti finanziari porta come conseguenza un incremento dei volumi di negoziazione, in quanti gli agenti, non raggiungendo mai una situazione di totale copertura del rischio, sono portati a scambiare dinamicamente nel mercato.

Nel complesso si può affermare che la teoria dei mercati finanziari con operatori in possesso di informazione omogenea non presenta un modello che spieghi gli elevati volumi e la forte componente autoregressiva degli stessi riscontrati empiricamente. D'altro canto, evidenzia che un cambiamento delle opportunità di investimento nelle scelte di portafoglio degli agenti, dovuto ad un *break* strutturale genera sicuramente volumi, con una certa componente autoregressiva.

La letteratura esaminata non identifica pertanto uno specifico modello di riferimento che spieghi l'andamento dei volumi di negoziazione nel tempo, anche se, empiricamente, osserva la presenza di componenti autoregressive che quindi dovrebbero ispirare la costruzione di un allertatore su questa grandezza.

L'esame della letteratura dei mercati finanziari in presenza di informazione non omogenea, che si presenta nel paragrafo successivo, offre maggiori spunti di riflessione sulla dinamica di questa variabile finanziaria.

1.2 Alcuni spunti teorici: informazione eterogenea e asimmetrica

L'ipotesi di informazione eterogenea e asimmetrica complica il quadro teorico che è stato appena descritto; infatti la disponibilità di un diverso set informativo tra gli agenti determina scambi sul mercato, non solo per motivi di *risk sharing-hedging,* ma anche per motivi speculativi.

L'analisi dell'andamento dei rendimenti dei titoli e dei volumi di negoziazione dipende dalla struttura del mercato (perfettamente o non perfettamente concorrenziale) e dalla natura dell'informazione degli agenti (eterogenea o asimmetrica).

Un mercato è perfettamente concorrenziale qualora gli agenti non influenzino il prezzo con il loro comportamento di mercato (vale a dire che operano come *price takers);* viceversa, se si verifica tale influenza il mercato non è perfettamente concorrenziale.

Si ha informazione eterogenea quando tutti gli agenti (o un insieme molto ampio) osservano segnali privati correlati con il valore fondamentale del titolo e informazione asimmetrica quando solo un insieme ristretto di agenti è in possesso di informazioni privilegiate riguardo al valore fondamentale del titolo.

Di seguito si presentano i principali risultati raccolti nella letteratura sui mercati finanziari con informazione eterogenea e asimmetrica, funzionali all'individuazione di un *set* di allertatori utili per la definizione di una procedura di M.A.D..

1.2.1 Mercato finanziari con informazione eterogenea

In letteratura, due importanti risultati sui mercati finanziari in presenza di informazione eterogenea sono:

1. l'esistenza di prezzi di equilibrio *fully revealing*;

2. il *no trade Theorem.*

Il primo comporta che i prezzi di equilibrio, in assenza di componenti di rumore nel mercato (quali ad esempio domanda aleatoria da parte di *noise traders*), incorporino precisamente e, tempestivamente, il valore delle informazioni private di cui gli agenti dispongono. Tale caratteristica dei prezzi è attribuita da Grossman alla circostanza che gli agenti dotati di informazione privata, per il fatto stesso di operare sul mercato, trasmettono il valore dell'informazione agli altri agenti [Grossman, 1989]. In questo contesto, la dimensione dello scambio è funzione crescente della precisione dell'informazione (la relazione è esplicita nel caso di variabili casuali normali e funzione di utilità esponenziale).

Il secondo risultato evidenzia che l'eterogeneità informativa, di per sè, non genera volumi. Infatti, se gli agenti, in assenza di tale eterogeneità, hanno raggiunto una allocazione ex ante Pareto ottima, allora l'eventuale comparsa di una differenziazione informativa tra gli stessi non genera volumi. [Milgrom e Stockey, 1982, Tirole, 1982].

Questi risultati, riconducendo l'analisi dei mercati finanziari con informazione eterogenea alla teoria classica, non offrono un contributo differenziale rispetto all'analisi dell'andamento dei rendimenti dei titoli e dei volumi di negoziazione (vedi par. 1.1).

Alcuni modelli successivi, inserendo una componente di *noise*, consentono di superare i limiti connessi all'esistenza di prezzi di equilibrio *fully revealing* e al *no trade theorem* in ipotesi di mercati perfettamente concorrenziali.

Kim e Verrecchia analizzano un modello con informazione privata costosa e una componente di *noise* di mercato in una economia caratterizzata da due istanti di tempo [Kim e Verrecchia, 1991]. Nel primo istante, gli agenti scambiano sulla base di informazioni private eterogenee sul valore fondamentale del titolo; nel secondo istante un annuncio pubblico rende omogenee le aspettative sul valore dello stesso. Gli autori mostrano che i volumi nel secondo istante sono correlati positivamente con il valore assoluto del cambiamento del prezzo tra i due momenti temporali esaminati e che il coefficiente moltiplicativo dipende dal grado di eterogeneità dell'informazione degli agenti. Questo modello statico mette in evidenza due risultati importanti:

1. volumi e cambiamenti assoluti dei prezzi sono positivamente correlati tra loro;

2. la relazione tra volumi e cambiamenti assoluti dei prezzi dipende positivamente dal grado di eterogeneità delle informazioni degli agenti.

Questi risultati sono stati ottenuti anche in modelli con agenti caratterizzati da opinioni differenziate ex ante (e quindi non legate ad una informazione privata) [Shalen, 1993] o da diversità interpretative di un segnale pubblico [Kandel e Pearson, 1995].

He e Wang hanno sviluppato un modello dinamico che prevede l'arrivo sul mercato di informazione privata e pubblica e una componente di *noise* di mercato. Gli agenti possono scambiare sia per accomodare uno *shock* dal lato dell'offerta (*non-informational trading*), che per speculare sull'andamento del titolo (*informational trading*). Gli autori mostrano come l'autocorrelazione dei volumi distingue l'informazione privata da quella pubblica. In particolare, quando un segnale pubblico viene osservato, volumi elevati si verificano solo in un intorno dello stesso, quando, invece, l'informazione è privata, i volumi tendono ad essere autocorrelati, in quanto l'informazione viene trasmessa dai prezzi nel corso del tempo, per l'operatività, anche successiva all'arrivo dell'informazione, da parte di agenti non informati, che agiscono da *followers* [He e Wang, 1995].

Harris e Raviv hanno conseguito un risultato simile stabilendo un nesso tra volumi elevati e autocorrelazione negli stessi con la presenza nel mercato di informazione privata [Harris e Raviv, 1993].

Altri modelli esaminano la relazione tra volumi e rendimenti, distinguendo se l'origine dei volumi sia o meno di tipo informativo. Campbell e altri hanno verificato empiricamente che, se i volumi sono elevati per motivi non informativi (liquidità, *preference shocks*), allora rendimenti accompagnati da volumi elevati saranno seguiti da rendimenti di segno contrario (*price reversal o mean reversion*) [Campbell et al., 1993, Conrad et al., 1994]. Llorente e altri evidenziano, invece, che se i volumi sono originati da nuove informazioni private che giungono sul mercato (*informational trading*), la relazione può essere, ma non necessariamente, di segno opposto [Llorente, et al., 2001].

Questi ultimi modelli evidenziano, quindi, che si avrà *mean reversion* se i volumi sono generati da motivazioni non informative e *momentum effect* (presenza di un *trend* e di autocorrelazione positiva nei rendimenti) se i volumi sono generati dalla presenza di informazioni private.

Rilasciando l'ipotesi di mercati perfettamente concorrenziali, la circostanza che l'operatività degli agenti è in grado di influenzare i prezzi dei titoli sui mercati finanziari fa venir meno i risultati relativi all'esistenza di prezzi di equilibrio *fully revealing* e al *no trade theorem.*

La letteratura non è molto ampia, anche perché mercati non perfettamente concorrenziali sono generalmente associati alla presenza di informazione asimmetrica nel mercato piuttosto che eterogenea (vedi par. 1.2.2). Un lavoro interessante è quello di Foster e Viswanathan, che spiega come una diversa percezione degli agenti sul valore fondamentale del titolo alimenti una reazione a catena, ove questi sono portati a continuare a negoziare a causa della differente interpretazione del *trading* degli altri agenti [Foster e Viswanathan, 1996].

L'analisi della letteratura sui mercati finanziari in presenza di informazione eterogenea conferma che ai fini della definizione di un allertatore sui volumi di negoziazione, un esame della serie storica dei volumi secondo uno schema di autocorrelazione possa essere di particolare ausilio. Inoltre, ribadisce l'opportunità di definire un allertatore che esamini i rendimenti secondo un preciso schema di *mean reversion,* nonché una calibrazione della procedura che valuti congiuntamente il risultato degli allertatori sui volumi e sui rendimenti.

1.2.2 Mercati finanziari con asimmetria informativa

La letteratura su mercati finanziari con informazione asimmetrica evidenzia come la presenza di fenomeni di *adverse selection* collegati al timore di scambiare con un agente in possesso di informazione privilegiata possa determinare a livello del singolo agente non informato la decisione di non effettuare alcun scambio e, quindi, a livello di mercato una riduzione dei volumi di negoziazione.

In ipotesi di mercati perfettamente concorrenziali, Wang analizza un modello con agenti informati e non informati, ove gli agenti informati possono anche scambiare fuori dal mercato (*private investment opportunities*) per motivi non legati al valore del titolo. Gli agenti informati scambiano in relazione alla presenza di informazioni private o di *shocks* legati alle opportunità di investimento private. Gli agenti non informati avvertono, quindi, un problema di *adverse selection* legato al rischio di partecipare ad uno scambio con un agente informato, che può indurli a non scambiare affatto sul mercato. Come conseguenza all'aumentare del grado di asimmetria il livello dei volumi diminuisce, mentre la *disclosure* di informazioni determina un aumento degli stessi, in quanto riduce i problemi di *adverse selection.* Nonostante l'effetto assoluto risulti diverso dal caso con informazione eterogenea (vedi par. 1.2.2), l'effetto dinamico in relazione all'arrivo di informazioni pubbliche è il medesimo [Wang, 1994].

Rilasciando l'ipotesi di mercato perfettamente concorrenziale, il quadro diventa più articolato, in quanto un agente in possesso di una informazione privilegiata definirà il suo comportamento, tenendo conto dell'effetto che lo stesso ha sul prezzo.

Kyle ha dimostrato che in un mercato non perfettamente concorrenziale con una componente di *noise* nel mercato, l'informazione che viene trasmessa dai prezzi è inferiore a quella trasmessa in un mercato perfettamente concorrenziale [Kyle, 1989].

In questo contesto la letteratura finanziaria presenta alcuni modelli che esaminano l'andamento dei volumi di negoziazione in relazione:

1. alla microstruttura del mercato, ed in particolare al fatto che il mercato sia organizzato come un mercato guidato dagli ordini (*order driven*) o dai prezzi (*quote driven*);

2. al grado di competitività dal lato dei *dealers-market makers;*

3. all'effetto di *adverse selection* indotto sugli agenti dalla presenza di agenti informati.

Alcuni interessanti risultati sono collegati all'ipotesi di un *dealer* che definisce un prezzo *bid* ed un prezzo *ask,* sapendo che nel mercato vi sono alcuni agenti informati ed altri non informati. In questo caso il *dealer,* temendo l'effetto di *adverse selection* (scambiare con un agente informato), tende a definire un elevato *bid-ask spread* e, quindi, non contribuisce ad incrementare la liquidità del mercato. Easley e O'Hara hanno evidenziato che, in un mercato *quote-driven,* il *dealer,* essendo a conoscenza della presenza di agenti informati nel mercato, tende a definire un *bid-ask spread* più elevato che genera condizioni inefficienti per lo svolgimento delle negoziazioni [Easley e O'Hara, 1987]. In situazioni estreme, Glosten e Milgrom hanno evidenziato come questo genere di comportamento da parte di un *dealer* può determinare dei livelli di prezzo per cui non si verifica alcuno scambio [Glosten e Milgrom, 1985].

Kyle ha analizzato un modello in cui un *insider trader* opera in un mercato in presenza di *noise traders* (la cui domanda è descritta da una variabile aleatoria che non dipende dal prezzo) con un *market maker* che si impegna a chiarire il mercato ad un prezzo pari al valore atteso del dividendo condizionato al flusso degli ordini osservati sul mercato. In una economia con una sola occasione di scambio l'*insider trader* che conosce perfettamente il valore del dividendo tende a nascondere la sua informazione, affinché il processo di determinazione dei prezzi del *market maker* non rifletta il valore dell'informazione privata in modo preciso. Questo comportamento dell'*insider* si traduce operativamente in una reattività della sua domanda di informazione privata inversamente proporzionale alla profondità del mercato e direttamente proporzionale alla componente di *noise* presente nel mercato. In particolare, l'*insider,* al fine di massimizzare i profitti collegati allo sfruttamento dell'informazione privilegiata, può essere indotto a scambiare quantitativi modesti, in modo che il *trading* non riveli al mercato il valore dell'informazione [Kyle, 1985].

Foster e Viswanathan, utilizzando motivazioni analoghe a quelle di Kyle, mostrano che i volumi sono autocorrelati in un mercato non perfettamente concorrenziale in presenza di fenomeni di abuso di mercato [Foster e Viswanathan, 1993].

L'analisi della letteratura sui mercati finanziari in presenza di asimmetria informativa conferma l'utilità dell'osservazione delle serie storiche dei volumi secondo uno schema di autocorrelazione degli stessi al fine di costruire un allertatore su questa variabile finanziaria. Inoltre, suggerisce di esaminare elementi collegati alla microstruttura dei mercati e alle modalità di svolgimento degli scambi, con particolare riferimento alla profondità del mercato e alla presenza di operatori dominanti. Tale analisi dovrebbe avvenire attraverso la costruzione di specifici allertatori capaci di rappresentare la presenza di operatori dominanti nel mercato, nonché l'evoluzione temporale della concentrazione del mercato. Inoltre, la considerazione che la concentrazione del mercato vada comunque esaminata in relazione all'andamento dei volumi ed alla profondità dello stesso, suggerisce che la calibrazione della procedura vada definita in modo da consentire una valutazione congiunta dei risultati degli allertatori sui volumi e sulla concentrazione.

1.3 La letteratura sugli effetti dell'attività di insider trading e di manipolazione

La letteratura sul tema degli abusi di mercato è molto limitata e spesso collegata all'attività di ricerca svolta dalle stesse Autorità di vigilanza a supporto della loro attività.

In particolare, mentre il tema della manipolazione è pressoché assente, anche per indisponibilità dei dati riferiti all'operatività dei diversi agenti sul mercato, sul tema dell'*insider trading* vi sono stati diversi contributi.

Tra questi, si menziona lo studio di Meulbroek, che ha mostrato come nei giorni di *insider trading* si osservino elevati volumi e *abnormal return*; ciò, in quanto agenti, non informati "seguono" il comportamento degli *insider* (c.d. *herd effect*) e contribuiscono così a far avvicinare più rapidamente il prezzo del titolo al valore che raggiungerebbe a seguito della diffusione della notizia [Meulbroek, 1992]. Risultati simili sono stati ottenuti da Cornell e Sirri analizzando il caso "Campbell e Taggart" [Cornell e Sirri, 1992]. Da queste analisi emerge che gli *insider* tendono a nascondere il loro operato tramite la realizzazione di transazioni di dimensione non elevata, circostanza peraltro già messa in luce nella analisi della letteratura finanziaria di cui al par. 1.2.2.

Bhattacharya e altri, mostrano che la diffusione di notizie relative a società quotate sul mercato messicano non ha alcun effetto sui rendimenti, sui volumi e sulla volatilità. Tale circostanza è dovuta all'intensa attività di *trading* da parte di *insider* che anticipa la diffusione sul mercato del valore dell'informazione privilegiata (c.d. *pre-announcement information leakage)* [Bhattacharya et al., 2000].

Chackravarty, analizzando il caso "Carnation", mostra invece che esiste un effetto sui prezzi dovuto alla diffusione di notizie, ma che non è possibile distinguere l'effetto sul prezzo dovuto a scambi da parte di *insider,* da quello relativo a scambi messi in atto da agenti che non sono in possesso di informazioni privilegiate [Chackravarty, 1999].

Bagliano e altri, in una specifica analisi del mercato italiano, mostrano che l'attività di *insider trading* non porta ad un mutamento nella autocorrelazione delle serie storiche dei volumi e dei rendimenti [Bagliano et al., 2001].

Con riferimento all'attività di ricerca svolta dalle Autorità di vigilanza, Mitchell e Netter descrivono la procedura adottata dalla *United States Securities and Exchange Commission* (SEC) per la stima degli *abnormal return* collegati alla diffusione di informazioni privilegiate. Questa procedura utilizza il *market model* e, quindi, attraverso un approccio econometrico del tipo *event-studies*, stima gli *abnormal return* di un titolo in relazione all'andamento del rendimento dell'indice di mercato. I risultati della stima sono alla base della determinazione del valore dell'informazione privilegiata di cui l'*insider* si appropria ai danni del mercato. Sulla base di questo valore la SEC determina le sanzioni da comminare all'insider (c.d. *disgorgement*) [Mitchell e Netter, 1994].

Di recente, Minenna ha proposto l'adozione di un processo diffusivo in alternativa al *market model* che inferisce l'andamento dei rendimenti futuri, sulla base di una calibrazione sui rendimenti che il titolo ha registrato in un certo periodo. Questa innovativa procedura individua la presenza di *abnormal return* in relazione alla *disclosure* di informazioni privilegiate. Inoltre, viene dimostrato che, calibrando il processo diffusivo sulla base della strategia di *trading* dell'*insider* (informazione disponibile presso le Autorità di vigilanza), si può calcolare il valore dell'informazione privilegiata di cui l'*insider* si appropria ai danni del mercato e, quindi, il *disgorgement* [Minenna, 2001].

Nel complesso, questi studi non chiariscono se l'informazione in possesso degli *insider* viene incorporata o meno nel prezzo prima della diffusione della notizia; tuttavia confermano che i volumi aumentano, che gli agenti non informati movimentano una parte rilevante degli stessi, che l'*insider trader* tende a nascondere la sua presenza nel mercato, che in presenza di informazioni privilegiate si verificano *abnormal return*, che gli *abnormal return* possono essere stimati attraverso l'utilizzo di processi diffusivi [Minenna, 2002].

Nella definizione degli allertatori sui volumi di negoziazione e sui rendimenti di un titolo, tali considerazioni confermano, quindi, la necessità di analizzare:

- la dinamica temporale dei volumi di negoziazione determinata dall'operatività dei diversi agenti presenti sul mercato secondo uno schema di autocorrelazione;

- l'andamento del rendimento di un titolo al fine di individuare la presenza di *abnormal return* tramite l'utilizzo di processi diffusivi .

1.4 L'esperienza di vigilanza della Consob

L'esperienza di vigilanza della Consob è maturata a partire dal 1991, anno in cui il legislatore con la legge n.157/1991 ha definito un quadro giuridico specifico per l'*insider trading* e l'aggiotaggio. Dall'entrata in vigore di questa nuova legge la Consob ha segnalato alla Autorità Giudiziaria 140 casi di abuso di mercato.

L'azione di vigilanza della Consob sui fenomeni di abuso di mercato avviene attraverso strumenti operativi di indagine e strumenti di analisi. Tra i primi si includono l'analisi dell'operatività degli intermediari, delle posizioni lire e titoli dei singoli committenti, dei registri degli ordini e delle operazioni, la ricerca di notizie sull'emittente, l'analisi dei relativi bilanci e degli studi pubblicati, ecc. Questi strumenti consentono di verificare la sussistenza del *fumus* di una condotta di abuso di mercato e di accertare gli elementi necessari per delimitare i contorni della condotta stessa.

Gli strumenti di analisi cercano, invece, di valutare l'impatto economico di una condotta di abuso di mercato sull'integrità dei mercati e l'eventuale pregiudizio arrecato agli investitori. Per i casi di *insider trading,* una volta identificata l'informazione privilegiata, si deve valutare la sua *price sensitivity,* nonché il valore dell'informazione di cui i diversi *insider* si appropriano ai danni del mercato [Minenna, 2002]; per i casi di aggiotaggio, una volta individuata la tipologia di condotta manipolativa, deve essere esaminata l'anomalia indotta sull'andamento del titolo e quantificare i danni arrecati al mercato [Milia, 2001]. Al riguardo, è importante infatti ricordare che la sanzione da comminare agli agenti, che attuano una condotta di abuso di mercato, non può prescindere da valutazioni sugli effetti economico-finanziari che tale condotta ha sui mercati e sugli investitori.

L'esame ex-post dei diversi casi di abuso di mercato rilevati dalla Consob evidenzia che tali fenomeni lasciano delle "tracce" sui mercati finanziari sia in termini di andamento del prezzo del titolo che dei livelli dei volumi di negoziazione [Tuccari, 1999].

Per quanto riguarda l'*insider trading,* considerata la tendenza dell'*insider* a nascondere la propria presenza sul mercato, è il valore dell'informazione privilegiata e il momento di *disclosure* sul mercato, anche in relazione all'eventuale anticipato diffondersi di *rumors*, a determinare eventuali andamenti anomali del titolo in termini di rendimenti e di volumi di negoziazione. Da qui, l'importanza di mantenere presso le Autorità di vigilanza un database delle informazioni societarie, nonché la predisposizione di apposite unità di *enforcement* per il monitoraggio della cosiddetta informativa continua e periodica.

Con riferimento all'aggiotaggio, l'esperienza di vigilanza della Consob distingue tra casi di *market based manipulation* e di *information based manipulation.*

Nell'ambito della *market based manipulation* è stato osservato che i prezzi possono essere alterati sia con operazioni effettive (*trade based manipulation)* che con operazioni fittizie (*wash sales/matched orders)* e che vi sono alcuni prezzi che hanno una valenza informativa superiore agli altri, quali il prezzo di apertura e di chiusura. Questi infatti, vengono presi come riferimento in alcune regole di funzionamento micro-strutturale dei mercati. Ad esempio, è stata osservata la manipolazione del prezzo di apertura di alcuni titoli in quanto determinante il *pay-off* della componente derivativa di prodotti strutturati collocati sul mercato *retail.*

Inoltre, è stato rilevato che la capitalizzazione, la concentrazione della proprietà, la liquidità sono elementi che impattano sulla probabilità che su un titolo quotato si verifichino alcuni comportamenti manipolativi. Ad esempio, per i titoli sottili, gli agenti potrebbero essere indotti ad effettuare scambi al fine di creare l'apparenza di un mercato attivo, di guidare il titolo a livelli superiori rispetto a quelli che esprimerebbe il mercato, di incrementare il valore di mercato di una società in vista di una futura cessione, ecc. In genere, i *manipulator* sono collegati agli azionisti di controllo della società e l'organizzazione della condotta di abuso di mercato richiede accordi fiduciari con intermediari e investitori istituzionali. Questi interventi, spesso, presentano delle similitudini con interventi di stabilizzazione del prezzo del titolo o di anticipazione della diffusione di informazioni sulla società.

Con riferimento alla *information based manipulation* i casi osservati sono collegati al ruolo fondamentale che le informazioni svolgono per qualunque investimento finanziario. Al riguardo si evidenziano due problemi: il primo consiste nel conflitto di interessi tipico dell'intermediazione finanziaria che da un lato diffonde studi e indicazioni di investimento e dall'altro opera direttamente sul mercato e il secondo, più tipicamente italiano, riguarda la mancanza di "editori puri". Ciò premesso, una delle fattispecie rilevate dalla Consob consiste nella diffusione di comunicazione non veritiere su eventi societari o sulla situazione della società finalizzata ad influenzare i prezzi di titoli quotati sui mercati finanziari. In genere questa condotta è collegata alla presenza di azionisti di controllo spesso in difficoltà finanziaria. In alcuni casi è stata osservata la diffusione di notizie stampa fuorvianti o tendenziose con le quali le società comunicano al mercato l'esistenza di progetti di ristrutturazione anche per il tramite di soggetti non direttamente collegati alla società stessa. Un'ulteriore fattispecie consiste nella diffusione da parte degli intermediari di studi su società con previsioni di dati e suggerimenti esagerati e/o falsi. In tali casi è stata rilevata la presenza di una operatività non coerente da parte dell'intermediario che aveva prodotto lo studio.

Le ipotesi esemplicative di abuso di mercato sopra esposte, pongono in risalto che sia i prezzi, sia i rendimenti dei titoli generalmente subiscono delle brusche variazioni (ad esempio nel momento in cui viene data *disclosure* di una informazione privilegiata), ovvero seguono degli andamenti non riconducibili ad una dinamica di tipo *mean-reverting* (ad esempio in presenza di fenomeni manipolativi). Inoltre, evidenziano che i volumi di negoziazione variano sia in termini assoluti, mantenendo in genere una componente autoregressiva, sia di composizione degli intermediari-negoziatori. Con riferimento alla composizione emerge la necessità di considerare in particolare due variabili:

1. il livello di concentrazione degli intermediari, inteso come il numero degli intermediari e la relativa quota-parte dei volumi negoziati (c.d. concentrazione statica);

2. l'evoluzione della concentrazione degli intermediari, ossia l'andamento della quota-parte dei volumi di negoziazione di ciascun intermediario su uno specifico titolo (c.d. concentrazione dinamica).

Queste considerazioni che in sintesi riassumono l'esperienza di vigilanza della Consob confermano l'opportunità di definire un allertatore sui volumi di negoziazione tramite l'esame della serie storica dei volumi secondo uno schema autoregressivo e sui rendimenti attraverso la calibrazione di un processo diffusivo di tipo *mean-reverting.* Inoltre, suggeriscono di definire due allertatori che esaminino la composizione degli intermediari-negoziatori, distinguendo tra la concentrazione statica e quella dinamica. Infine, l'evidenza empirica mostra come fenomeni di abuso di mercato si verifichino generando delle alterazioni sull'andamento di più variabili finanziarie allo stesso tempo; questa circostanza implica che la calibrazione della procedura vada definita in modo da consentire una valutazione sintetica dei risultati di tutti gli allertatori.

2 La procedura di *Market Abuse Detection*

2.1 Premessa

Una procedura di M.A.D. individua, su base giornaliera, quei titoli quotati sui mercati finanziari per i quali si stanno verificando delle condotte illecite, riconducibili all'aggiotaggio o all'*insider trading.*

La procedura individua la potenziale presenza di fenomeni di abuso di mercato, attraverso l'esame dell'andamento nel tempo di variabili finanziarie che rappresentano i flussi informativi elementari delle negoziazioni dei titoli sui mercati finanziari disponibili presso una Autorità di Vigilanza.

L'esame dell'andamento delle variabili finanziarie richiede la definizione di un modello di riferimento per ognuna di esse. Lo sviluppo dei modelli di riferimento è finalizzato alla individuazione di soglie dinamiche, il cui superamento diventa un segnale di un andamento anomalo della variabile esaminata (c.d. *alert).*

La variabile finanziaria e il relativo modello di riferimento diventano quindi per la procedura un "allertatore" di potenziali fenomeni di abuso di mercato. Individuati gli allertatori, la calibrazione di una procedura di M.A.D. consiste nella calibrazione dei modelli di riferimento degli stessi, vale a dire nella loro specificazione parametrica in chiave previsionale, e nella individuazione di un algoritmo che consenta una interpretazione congiunta dei diversi *alert.*

Come anticipato nella introduzione, l'individuazione e la calibrazione degli allertatori della procedura di M.A.D. è stata realizzata analizzando:

- ciò che la teoria dei mercati finanziari e l'esperienza di vigilanza suggeriscono in merito;
- i fenomeni di *insider trading* e di aggiotaggio rilevati dalla Consob.

2.2 Gli allertatori

L'esame della letteratura e della esperienza di vigilanza hanno evidenziato le seguenti indicazioni su come i prezzi di negoziazione, le quantità negoziate e la denominazione degli agenti, che hanno effettuato la transazione (vale a dire i flussi informativi elementari delle negoziazioni dei titoli sui mercati finanziari disponibili presso una Autorità di Vigilanza) debbano essere analizzati per costruire delle variabili finanziarie il cui andamento nel tempo possa essere segnaletico di fenomeni di abuso di mercato:

- i prezzi di negoziazione si analizzano in termini di rendimenti, attraverso lo studio della dinamica del logaritmo del prezzo;
- i rendimenti dei titoli, generalmente, subiscono delle brusche variazioni (ad esempio nel momento in cui viene data *disclosure* di una informazione privilegiata), ovvero seguono degli andamenti non riconducibili ad una dinamica di tipo *mean-reverting* (ad esempio in presenza di fenomeni manipolativi);
- la presenza di *abnormal return* viene individuata tramite una stima dei rendimenti che può essere condotta attraverso l'utilizzo di processi diffusivi;
- modelli autoregressivi riescono a catturare nel discreto sia la componente di *mean reversion* sia di *momentum effect* dei rendimenti;
- le quantità negoziate dai singoli agenti vengono esaminate in termini di volumi di negoziazione giornalieri secondo uno schema di autocorrelazione;
- la denominazione degli agenti è analizzata in relazione alle quantità negoziate dagli stessi in una giornata, studiando sia la profondità del mercato, sia la presenza di operatori dominanti, sia la composizione dei diversi intermediari-negoziatori;
- la composizione del mercato viene valutata attraverso due stadi di approfondimento:
  - il livello di concentrazione degli intermediari, inteso come il numero degli intermediari e la relativa quota-parte dei volumi negoziati (c.d. concentrazione statica);

– l'evoluzione della concentrazione degli intermediari, ossia l'andamento della quota-parte dei volumi di negoziazione di ciascun intermediario su uno specifico titolo (c.d. concentrazione dinamica).

Sulla base di tali indicazioni sono state, quindi, costruite quattro variabili finanziarie che rappresentano nel tempo l'andamento:

1. dei volumi di negoziazione del titolo;
2. dei rendimenti del titolo;
3. della concentrazione di mercato statica;
4. della concentrazione di mercato dinamica.

La definizione di un allertatore di una procedura di M.A.D. richiede che l'esame di queste variabili avvenga sulla base di un modello di riferimento; questo, opportunamente calibrato, definisce delle soglie dinamiche che individuano gli *alert* della procedura. In particolare, la costruzione degli allertatori deve garantire alla procedura una individuazione in tempo reale dei titoli per i quali si è in presenza di potenziali fenomeni di abuso di mercato.

L'esame dei diversi casi di abuso di mercato esaminati dalla Consob ha garantito un rilevante supporto nella definizione dei processi diffusivi che descrivono l'andamento nel tempo delle variabili finanziarie e caratterizzano, quindi, i modelli di riferimento.

Si espongono di seguito le modalità di costruzione e di funzionamento degli allertatori riferiti alle quattro variabili finanziarie in esame, riferendosi ai flussi informativi elementari delle negoziazioni di un qualsiasi titolo quotato sul mercato azionario. A tal fine nel prosieguo si denotano con P_t e Q_t rispettivamente il prezzo ufficiale e il volume di negoziazione osservati sui mercati finanziari per un generico titolo nel giorno t.

2.2.1 L'analisi dei volumi di negoziazione

L'esame della serie storica dei volumi Q_t è stato condotto secondo uno schema di autocorrelazione, come la disamina della letteratura sui mercati finanziari e l'esperienza di vigilanza suggeriscono. Al riguardo si evidenzia, però, che non vi sono indicazioni in letteratura su di uno specifico modello di riferimento per condurre tale esame.

Considerato l'obiettivo di definire un allertatore che sia in grado di evidenziare delle anomalie nell'andamento di questa variabile finanziaria in una logica di individuazione degli abusi di mercato, l'analisi dei diversi casi esaminati dalla Consob ha suggerito di ipotizzare che l'andamento dei volumi sia governato nel discreto dal seguente processo autoregressivo, che per costruzione segue uno schema di autocorrelazione:

$$Q_k = \phi Q_{k-1} + \widehat{\sigma} Z_k \tag{1}$$

ove ϕ è una funzione deterministica del tempo, $Q_0 = q_0$ e $(Z_k)_{k\geq 0}$ è una sequenza di variabili causali identicamente indipendentemente distribuite come una normale con media zero e varianza unitaria su $\mathbb{R}^1$. La variabilità di $\widehat{\sigma}$ in relazione al tempo è garantita dal fatto che moltiplica una variabile casuale con varianza definita in relazione all'unità temporale.

Per comodità espositiva definito $\gamma = 1 - \phi$ si riscrive la (1) come segue:

$$Q_k - Q_{k-1} = -\gamma Q_{k-1} + \widehat{\sigma} Z_k \tag{2}$$

Una prima considerazione sulla (2) è che, essendo q_0 una costante e $Z_1, \ldots, Z_k$ una sequenza di variabili aleatorie indipendenti distribuite come una normale con media zero e varianza unitaria, la soluzione $\{Q_k\}_{k\geq 0}$ è una catena di Markov rispetto alla filtrazione $\{\Im_k\}_{k\geq 0}$ generata dalla sequenza $Z_1, \ldots, Z_k$, che assume valori su $\mathbb{R}^1$ e ove k è l'indicatore del tempo nel discreto. La coppia $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$ definisce lo spazio misurabile di $\{Q_k\}_{k\geq 0}$ ove $\mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$ è il *field* di Borel su $\mathbb{R}^1$. Ogni processo discreto di Markov così definito è identificato dalla distribuzione iniziale $v_0(\cdot)$ e dalla probabilità di transizione $\Pi_{1,k}(\cdot,\cdot)$ definite su $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$[1].

Le proprietà del modello di riferimento sub (2) non consentono di effettuare una previsione sull'andamento dei volumi, utilizzando un numero di osservazioni giornaliere che si riferiscono ad un orizzonte temporale mensile o inferiore, a meno di non perdere di significatività statistica nell'analisi o di incorrere in numerose complicazioni procedurali [2].

Al fine di costruire un allertatore rispondente agli obiettivi della procedura si studiano, quindi, le caratteristiche distributive della corrispondente versione nel tempo continuo della (2) [Nelson, 1990].

Il vantaggio del passaggio al limite è rappresentato dalla circostanza che, facendo riferimento ad una equazione differenziale stocastica, qualora questa presenti una soluzione integrata, ovvero si conoscano le proprietà distributive della soluzione, è possibile costruire una banda di confidenza di tipo predittivo per la variabile descritta dal processo diffusivo. Questa banda definisce nel tempo per i volumi di negoziazione le soglie dinamiche che identificano gli *alert* della procedura di M.A.D.. La logica sottesa all'indicatore che si intende costruire è mutuata da quella, utilizzata da Minenna, per inferire l'andamento del rendimento di un titolo in chiave predittiva ed identificare la presenza di *abnormal return* [Minenna, 2001].

Si riscala temporalmente, pertanto, il processo discreto di Markov $\{Q_k\}_{k\geq 0}$ e si dimostra che la (2) converge debolmente al processo diffusivo $\{Q_t\}$ caratterizzato dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dQ_t = -\theta Q_t dt + \sigma dW_t \tag{3}$$

[1] In particolare $\forall \Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$:
1. $P(Q_0 \in \Gamma) = v_0$;
2. $P(Q_{k+1} \in \Gamma | \Im_k) = P(Q_{k+1} \in \Gamma | Q_k) = \Pi_{1,k}(Q_k, \Gamma)$.

[2] Per una trattazione delle problematiche connesse alla stima dei parametri per il modello in esame si rinvia alla bibliografia [Greene, 1993].

ove θ e σ sono funzioni deterministiche del tempo e W_t è un moto Browniano standard uni-dimensionale. La dimostrazione è condotta con riferimento al generico processo diffusivo $\{X_t\}$ nell'appendice A.

La (3) è la versione nel tempo continuo della (2). Questa equazione differenziale stocastica è nota in letteratura come processo diffusivo Ornestein-Uhlenbeck aritmetico. Tale processo diffusivo è caratterizzato dalle seguenti proprietà distributive con riferimento a qualsiasi condizione iniziale costante individuata al tempo s, con $s < t$, pari a Q_s:

$$Q_t \sim N\left(Q_s e^{-\theta(t-s)}; \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}\left(1 - e^{-2\theta(t-s)}\right)}\right) \tag{4}$$

La dimostrazione di queste proprietà distributive è riportata nell'appendice A con riferimento al generico processo diffusivo $\{X_t\}$.

La relazione tra la (2) e la (3) e le proprietà distributive di quest'ultima equazione differenziale stocastica (4) definiscono il modello di riferimento da utilizzare per l'esame della serie storica dei volumi e, quindi, connotano univocamente l'allertatore su questa variabile finanziaria.

La costruzione delle soglie dinamiche che consentono di individuare gli *alert* per i volumi di negoziazione è stata, infatti, realizzata sfruttando le proprietà del modello di riferimento. Nel successivo paragrafo 2.3.1 si specificano nel dettaglio la costruzione di tali soglie e la relativa calibrazione.

2.2.2 L'analisi dei rendimenti

La teoria dei mercati finanziari e l'esperienza di vigilanza hanno evidenziato l'opportunità di esaminare la serie storica dei rendimenti di un titolo attraverso un modello autoregressivo. In particolare, considerato l'obiettivo di definire un allertatore che sia in grado di evidenziare delle anomalie nell'andamento di questa variabile finanziaria in una logica di individuazione degli abusi di mercato , l'esame dei diversi casi esaminati dalla Consob ha evidenziato che un modello che descrive opportunamente l'andamento nel tempo di questa variabile finanziaria nel discreto è il seguente:

$$R_k = \alpha + \lambda R_{k-1} + \widehat{\sigma} Z_k \tag{5}$$

ove $R = \ln(P)$, α e λ sono funzioni deterministiche del tempo[3], $R_0 = r_0$ e $(Z_k)_{k\geq 0}$ è una sequenza di variabili causali identicamente indipendentemente distribuite come una normale con media zero e varianza unitaria su $\mathbb{R}^1$.

Per comodità espositiva definito $\lambda = 1 - \gamma$ e $\alpha = \gamma \cdot \eta$ si riscrive la (5) come segue:

$$R_k - R_{k-1} = \gamma \cdot (\eta - R_{k-1}) + \widehat{\sigma} Z_k \tag{6}$$

[3] La variabilità di $\widehat{\sigma}$ in relazione al tempo è garantita dal fatto che moltiplica una v.c. con varianza definita in relazione all'unità temporale.

Analogamente a quanto fatto nel par. 2.2.1, al fine di costruire un allertatore rispondente agli obiettivi della procedura si studiano, quindi, le caratteristiche distributive della corrispondente versione nel tempo continuo della (6) [Nelson, 1990].

Come già evidenziato nel citato paragrafo, il vantaggio del passaggio al limite consiste nella individuazione *a-priori* delle proprietà distributive del processo $\{R_k\}$ e, quindi, nella possibilità di definire agilmente una banda di confidenza di tipo predittivo per la variabile descritta dal processo diffusivo; questa, definendo le soglie dinamiche che identificano gli *alert* della procedura trasforma una variabile finanziaria in un allertatore.

Si riscala temporalmente quindi, analogamente a quanto fatto nel par. 2.2.1, il processo discreto di Markov $\{R_k\}_{k\geq 0}$ e si dimostra che la (6) converge debolmente al processo diffusivo $\{R_t\}$ caratterizzato dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dR_t = q\,(\mu - R_t)\,dt + \sigma dW_t \tag{7}$$

ove q e μ sono funzioni deterministiche del tempo e W_t è un moto Browniano standard uni-dimensionale[4].

La (7) è la versione nel tempo continuo della (6) e si riconosce nuovamente in questa equazione differenziale stocastica un processo diffusivo Ornestein-Uhlenbeck aritmetico. Tale processo diffusivo è caratterizzato dalla seguente proprietà distributiva con riferimento a qualsiasi condizione iniziale costante individuata al tempo s, con $s < t$, pari a R_s:[5]

$$R_t \sim N\left((R_s - \mu)e^{-q(t-s)} + \mu;\ \sqrt{\frac{\sigma^2}{2q}\left(1 - e^{-2q(t-s)}\right)}\right) \tag{8}$$

La relazione tra la (6) e la (7) e le proprietà distributive di quest'ultima equazione differenziale stocastica (8) definiscono il modello di riferimento da utilizzare per l'esame della serie storica dei rendimenti e, quindi, connotano univocamente l'allertatore su questa variabile finanziaria.

La costruzione delle soglie dinamiche che consentono di individuare gli *alert* per i rendimenti è stata, infatti, realizzata sfruttando le proprietà del modello di riferimento. Nel successivo paragrafo 2.3.2 si specificano nel dettaglio la costruzione di tali soglie e la relativa calibrazione.

2.2.3 L'analisi della concentrazione di mercato statica

L'esperienza di vigilanza della Consob, nonché l'esame della letteratura finanziaria hanno evidenziato l'opportunità di esaminare, in una prospettiva di individuazione degli abusi di mercato, la composizione degli intermediari-negoziatori che operano sul mercato. Una prima analisi in tal senso è offerta dall'esame

---

[4] La dimostrazione è condotta con riferimento al generico processo diffusivo $\{X_t\}$ nell'appendice A.

[5] La dimostrazione di queste proprietà distributive è riportata nell'appendice A con riferimento al generico processo diffusivo $\{X_t\}$.

della c.d. concentrazione statica, vale a dire del livello di concentrazione degli intermediari, inteso come il numero degli intermediari e la relativa quota-parte dei volumi negoziati.

Il primo passaggio per la costruzione di un allertatore su questa grandezza consiste nella identificazione della relativa variabile finanziaria. L'esame dei diversi casi di abuso di mercato rilevati dalla Consob ha orientato questa scelta, tra i diversi indici proposti in letteratura sulla concentrazione di mercato, verso un indice di entropia, i.e.:

$$\Theta_t = \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} \left(\frac{Q_t(i)}{\mu_t} \right)^{\alpha} \tag{9}$$

dove

n_t è il numero di operatori presenti nel mercato al tempo t

$Q_t(i),\ i = 1, \ldots, n_t$ sono le quantità negoziate dall'i-esimo intermediario al tempo t

$\mu_t = \frac{\sum_{i=1}^{n_t} Q_t(i)}{n_t}$

Il modello di riferimento, che connota l'allertatore, si basa su una equazione differenziale stocastica, i.e.

$$d\Theta_t = -\zeta \Theta_t dt + \sigma dW_t \tag{10}$$

che è stata derivata analogamente a quanto fatto con riferimento ai volumi di negoziazione attraverso il passaggio al limite del corrispondente processo discreto (vedi par. 2.2.1), i.e.:

$$\Theta_k - \Theta_{k-1} = -\xi \Theta_{k-1} + \widehat{\sigma} Z_k \tag{11}$$

Questo modello è caratterizzato dalla seguente proprietà distributiva con riferimento a qualsiasi condizione iniziale costante individuata al tempo s, con $s < t$, pari a Θ_s:

$$\Theta_t \sim N \left(\Theta_s e^{-\zeta(t-s)}; \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\zeta} \left(1 - e^{-2\zeta(t-s)}\right)} \right) \tag{12}$$

Il motivo di questa scelta è che in condizioni di normale andamento delle negoziazioni, vale a dire in assenza di *failure* che potrebbero essere segnaletiche di potenziali fenomeni di abuso di mercato, l'indice su orizzonti temporali brevi, dovrebbe presentare un andamento autoregressivo nel discreto e *mean reverting* nel continuo.

L'esame della variabile finanziaria Θ_t è stato condotto con riferimento alle quantità acquistate, alle quantità vendute ed alla c.d. operatività lorda, vale a dire la somma degli acquisti e delle vendite, dei diversi intermediari-negoziatori;

sono stati, quindi, costruiti tre allertatori identici nella formulazione matematica e riferiti a ciascuna delle tre menzionate grandezze.

Questa scelta è legata alla necessità di cogliere, non solo l'evoluzione della variabile con riferimento alla operatività complessiva del mercato, ma anche le eventuali direzioni che il singolo intermediario e, quindi, anche il mercato intraprende in quanto potrebbero essere indicative di condotte di abuso di mercato.

Nel successivo paragrafo 2.3.3 si specifica nel dettaglio la calibrazione degli allertatori, la modalità di costruzione delle soglie dinamiche che, sulla base delle proprietà distributive del modello di riferimento, consentono di individuare gli *alert* e l'algoritmo che, interpretando i risultati dei tre allertatori, determina l'*alert* per la concentrazione statica.

2.2.4 L'analisi della concentrazione dinamica

L'esperienza di vigilanza e la teoria dei mercati finanziari hanno evidenziato che l'analisi della composizione di mercato deve essere condotta, anche, avendo a riferimento l'evoluzione della concentrazione degli intermediari, ossia l'andamento della quota-parte dei volumi di negoziazione di ciascun intermediario-negoziatore su uno specifico titolo (c.d. concentrazione dinamica).

Questa ulteriore analisi sulla concentrazione è infatti in grado di segnalare eventuali variazioni nel ruolo che uno specifico intermediario-negoziatore svolge nella determinazione dei volumi complessivi di negoziazione giornalieri di un titolo.

Il primo passaggio per la costruzione di un allertatore su questa grandezza consiste nella identificazione della relativa variabile finanziaria. L'esame dei diversi casi di abuso di mercato rilevati dalla Consob ha orientato questa scelta verso un indice di dissomiglianza, i.e.:

$$\Psi_t = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{n_t}} \sum_{i=1}^{\widetilde{n_t}} \widetilde{Q}_t(i)^2} \tag{13}$$

dove

$\widetilde{Q}_t(i) = Q_t(i) - Q_{t-k}(i)$

$Q_t(i),\ i = 1, \ldots, n_t$ sono le quantità negoziate dall'i-esimo intermediario al tempo t

$\widetilde{n_t}$ è il numero di operatori che presenta un valore diverso da zero per la variabile $\widetilde{Q}_t(i)$

Il modello di riferimento, che connota l'allertatore, si basa su una equazione differenziale stocastica, i.e.:

$$d\Psi_t = -\omega \Psi_t dt + \sigma dW_t \tag{14}$$

che è stata ottenuta, anche in questo caso come in precedenza per l'analisi della concentrazione statica, attraverso il passaggio del corrispondente processo discreto, (vedi par. 2.2.3), i.e.:

$$\Psi_k - \Psi_{k-1} = -\upsilon \Psi_{k-1} + \widehat{\sigma} Z_k \tag{15}$$

Questo modello è caratterizzato dalla seguente proprietà distributiva con riferimento a qualsiasi condizione iniziale costante individuata al tempo s, con $s < t$, pari a Ψ_s:

$$\Psi_t \sim N\left(\Psi_s e^{-\omega(t-s)}; \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\omega}\left(1 - e^{-2\omega(t-s)}\right)}\right) \tag{16}$$

L'esame dell'evoluzione della variabile Ψ_t è stato condotto con riferimento al valore delle quantità acquistate e vendute, nonché delle quantità complessivamente negoziate da ciascun intermediario, inteso come la differenza tra le quantità acquistate e vendute (c.d. operatività netta). Sono stati, quindi, costruiti tre allertatori identici nella formulazione matematica e riferiti a ciascuna delle tre menzionate grandezze.

La scelta di considerare per tale allertatore l'operatività netta unitamente alle quantità acquistate e vendute è collegata alla definizione di questa grandezza valutata in relazione alle caratteristiche della variabile Ψ_t. Infatti, rappresentando l'operatività netta ad uno specifico tempo t la sintesi del comportamento operativo tenuto da un intermediario-negoziatore sul mercato, il suo esame attraverso la variabile Ψ_t - che per costruzione confronta il dato quantitativo relativo all'operatività dei differenti intermediari-negoziatori con il corrispondente valore in un periodo precedente - è in grado di identificare i cambiamenti nel comportamento operativo dei differenti intermediari-negoziatori.

Nel successivo paragrafo 2.3.4 si specifica nel dettaglio la calibrazione degli allertatori, la modalità di costruzione delle soglie dinamiche che, sulla base delle proprietà distributive del modello di riferimento, consentono di individuare gli *alert* e l'algoritmo che, interpretando i risultati dei tre allertatori, determina l'*alert* per la concentrazione statica.

2.3 La Calibrazione della procedura

La calibrazione di una procedura di M.A.D. consiste nella:

- derivazione delle bande di confidenza di tipo predittivo funzionali alla individuazione degli *alert* delle diverse variabili finanziarie, sulla base delle proprietà del modello di riferimento degli allertatori;
- individuazione dell'orizzonte temporale necessario per la specificazione dei parametri utilizzati nelle bande di confidenza di tipo predittivo;
- definizione dell'orizzonte previsionale degli allertatori;

- specificazione dell'algoritmo che, interpretando congiuntamente i diversi *alert,* individua il segnale di un potenziale fenomeno di abuso di mercato che deve essere esaminato da parte delle unità di *enforcement* (c.d. *warning*);

- definizione del periodo di validità temporale di un segnale della procedura di M.A.D. *(warning)*, vale a dire per quanti giorni successivi a quello del segnale il titolo deve essere tenuto sotto osservazione dalle unità di *enforcement.*

L'esperienza di vigilanza e l'osservazione dei fenomeni di *insider trading* e di aggiotaggio rilevati dalla Consob, attraverso una applicazione *a-posteriori* della procedura di M.A.D., hanno garantito la verifica empirica per la sua calibrazione. In particolare, tale osservazione ha fornito le seguenti indicazioni:

- la procedura deve operare su base *rolling* attraverso un giornaliero aggiornamento dei parametri di stima degli allertatori; ogni giorno deve, quindi, individuare, per i titoli tenuti sotto il suo monitoraggio, quei fenomeni economico-finanziari riconducibili potenzialmente ad un caso di abuso di mercato;

- la calibrazione deve avvenire, utilizzando una serie di dati giornalieri poco profonda (pari o inferiore ad un mese di negoziazione); l'instabilità del modello, che ne deriva, consente, infatti, di cogliere i cambiamenti nelle prospettive di investimento dei diversi agenti che operano sul mercato;

- la capacità predittiva deve essere pari a un giorno di negoziazione; il continuo aggiornamento delle previsioni consente al modello di identificare puntualmente i casi meritevoli di approfondimento da parte delle unità di *enforcement.*

Queste scelte generano una elevata componente di *noise,* che è stata attentamente valutata nella costruzione degli allertatori.

La letteratura sui mercati finanziari e l'esperienza di vigilanza, corroborata dalla menzionata verifica empirica, hanno fornito indicazioni su come costruire l'algoritmo per l'interpretazione congiunta degli *alert* prodotti dai diversi allertatori. In particolare, è emersa l'opportunità di esaminare congiuntamente i dati sui volumi di negoziazione, sull'andamento dei rendimenti e sulla evoluzione della concentrazione di mercato.

2.3.1 La calibrazione dell'allertatore sui volumi[6]

Dato il processo diffusivo sub (3):

$$dQ_t = -\theta Q_t dt + \sigma dW_t \tag{3}$$

[6] I passaggi intermedi degli sviluppi matematici presentati in questo paragrafo sono disponibili su richiesta.

e le relative proprietà distributive espresse con riferimento ad una condizione iniziale che rappresenta un orizzonte temporale giornaliero, i.e.:

$$Q_t \sim N\left[Q_{t-1}e^{-\theta}; \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}(1-e^{-2\theta})}\right] \tag{17}$$

si può costruire una banda di confidenza di tipo predittivo che, considerati i dati dei volumi di negoziazione dei giorni precedenti, inferisce i possibili valori per il giorno successivo.

Infatti, considerato che per ogni variabile casuale normale standard Z, si ha:
$P(-z_{\frac{\varkappa}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\varkappa}{2}}) = \varkappa$
si può riscrivere quest'ultima relazione con riferimento al processo diffusivo Q_t, i.e.:
$P(-z_{\frac{\varkappa}{2}} \leq \frac{Q_t - Q_{t-1}e^{-\theta}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}(1-e^{-2\theta})}} \leq z_{\frac{\varkappa}{2}}) = \varkappa$

Da qui che la banda di confidenza di tipo predittivo ricercata si può pertanto definire come segue:

$$P\begin{pmatrix} -z_{\frac{\varkappa}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}\left(1-e^{-2\theta}\right)} + Q_{t-1}e^{-\theta} \leq \\ \leq Q_t \leq \\ \leq z_{\frac{\varkappa}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}\left(1-e^{-2\theta}\right)} + Q_{t-1}e^{-\theta} \end{pmatrix} = \varkappa \tag{18}$$

Gli estremi della banda rappresentano le soglie dinamiche, che definiscono gli *alert* per l'andamento dei volumi di negoziazione. Ogni qualvolta l'andamento osservato dei volumi di negoziazione sarà al di fuori di questa banda, si è in presenza di un *alert.*

Definita formalmente la banda di oscillazione è necessario, per la calibrazione dell'allertatore sui volumi, identificare una modalità per stimare i parametri che caratterizzano l'equazione differenziale stocastica sub (3) utilizzando i dati osservati nel discreto.

Una modalità efficace, che consente di arrivare ad una formulazione esplicita dei parametri e consente, quindi, di evitare l'utilizzo di procedure numeriche, consiste nel riscrivere la versione discreta del processo diffusivo sub (3), i.e.:

$$Q_k - Q_{k-1} = -\gamma Q_{k-1} + \widehat{\sigma} Z_k \tag{2}$$

affinché presenti le medesime caratteristiche distributive di quest'ultimo in termini di valore atteso e varianza condizionali[7].

Con riferimento al valore atteso, si impone, quindi, quanto segue:

$$E(Q_k|Q_{k-1}) = Q_{k-1} - \gamma Q_{k-1} = Q_{t-1}e^{-\theta}$$

Da qui che il parametro γ della (2) può essere riscritto in termini del parametro θ della (3), i.e.:

[7] Per ogni approfondimento sul tema si rinvia alla bibliografia [Dixit e Pindyck, 1994].

$$\gamma = 1 - e^{-\theta} \tag{19}$$

Affinché la deviazione standard di (2) sia uguale a quella della (3) è sufficiente imporre che:

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta})} \tag{20}$$

Si può quindi riscrivere la (2), utilizzando la (19) e la (20), come:

$$Q_k - Q_{k-1} = \left(e^{-\theta} - 1\right) Q_{k-1} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta})} Z_k \tag{21}$$

La (21) diventa il processo discreto che, sulla base delle osservazioni giornaliere del dato dei volumi, consente la stima dei parametri della (3).

Infatti, una analisi di regressione sulla base del seguente modello:

$$Q_k - Q_{k-1} = \widehat{b} Q_{k-1} + e_k \tag{22}$$

ove $\widehat{b}$ è il parametro della regressione, e_k e $\widehat{\sigma}$ sono rispettivamente i relativi errori e il *mean squared error,* i.e. :

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\sum_k \frac{e_k^2}{n-2}} \tag{23}$$

consente di determinare il parametro θ della (3) attraverso la risoluzione della seguente equazione, che pone a confronto la (21) con la (22) :

$$\widehat{b} = -\left(1 - e^{-\theta}\right) \Rightarrow$$

Attraverso alcuni semplici passaggi matematici si ottiene il valore del parametro ricercato:

$$\theta = \ln(\widehat{b} + 1)^{-1} \tag{24}$$

Per la stima di σ, utilizzando la (20) e la (24), si ottiene, dopo alcune semplificazioni, la seguente relazione:

$$\widehat{\sigma} = \sigma \sqrt{\frac{\ln(\widehat{b} + 1)^2}{\widehat{b}^2 + 2\widehat{b}}} \tag{25}$$

La verifica empirica dell'allertatore, come anticipato, è stato effettuato attraverso l'esame dei diversi casi di abuso di mercato rilevati dalla Consob. Tale verifica empirica ha consentito di identificare l'orizzonte temporale per effettuare la stima di regressione dei dati nel discreto, che è risultato pari a 15 giorni di negoziazione. Il valore della variabile casuale normale standardizzata z, che definisce la banda di confidenza di tipo predittivo, è pari a 2,33 e, pertanto, include il 99% dei possibili scenari previsionali della variabile finanziaria.

2.3.2 La calibrazione dell'allertatore sui rendimenti[8]

Dato il processo diffusivo sub (7):

$$dR_t = q(\mu - R_t)dt + \sigma dW_t \qquad q, \sigma > 0 \tag{7}$$

e le relative proprietà distributive espresse con riferimento ad una condizione iniziale, che rappresenta un orizzonte temporale giornaliero, i.e.:

$$R_t \sim N\left((R_{t-1} - \mu)e^{-q} + \mu; \sqrt{\frac{\sigma^2}{2q}\left(1 - e^{-2q}\right)}\right) \tag{26}$$

si può costruire analogamente a quanto fatto nel par.2.3.1 una banda di confidenza di tipo predittivo che, considerati i dati dei rendimenti dei giorni precedenti, inferisce i possibili valori per il giorno successivo, i.e.:

$$P\begin{pmatrix} -z_{\frac{\varkappa}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{2q}(1 - e^{-2q})} + (R_{t-1} - \mu)e^{-q} + \mu \leq \\ \leq R_t \leq \\ \leq z_{\frac{\varkappa}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{2q}(1 - e^{-2q})} + (R_{t-1} - \mu)e^{-q} + \mu \end{pmatrix} = \varkappa \tag{27}$$

Gli estremi della banda rappresentano le soglie dinamiche che definiscono gli *alert* per l'andamento dei rendimenti di negoziazione. Ogni qualvolta l'andamento osservato dei rendimenti sarà al di fuori di questa banda si è in presenza di un *alert*.

Per la stima dei parametri si ripercorre l'iter definito nel par. 2.3.1, che come già evidenziato, consente di arrivare ad una formulazione esplicita dei parametri e di evitare l'utilizzo di procedure numeriche[9].

Si costruisce, quindi, partendo dalla (6):

$$R_k - R_{k-1} = \gamma \cdot (\eta - R_{k-1}) + \widehat{\sigma} Z_k \tag{6}$$

un processo discreto che abbia i parametri distributivi della equazione differenziale stocastica sub (7) e indicati nella (26).

Dalla eguaglianza dei valori attesi condizionali si ottengono le seguenti relazioni tra i parametri della (6) e della (7), i.e.:

$$\eta = \mu \tag{28}$$

$$\gamma = 1 - e^{-q} \tag{29}$$

Dalla eguaglianza delle varianze condizionali si ottiene:

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2q}\left(1 - e^{-2q}\right)} \tag{30}$$

[8] I passaggi intermedi degli sviluppi matematici presentati in questo paragrafo sono disponibili su richiesta.

[9] Per ogni approfondimento sul tema si rinvia alla bibliografia [Dixit e Pindyck, 1994].

Si può, quindi, riscrivere la (6) utilizzando, la (28), la (29) e la (30) come:

$$R_k - R_{k-1} = \left(1 - e^{-q}\right) \cdot \mu + (e^{-q} - 1)R_{k-1} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2q}(1 - e^{-2q})}Z_k \tag{31}$$

La (31) diventa il processo discreto che, sulla base delle osservazioni giornaliere del dato dei rendimenti, consente la stima dei parametri della (7).

Analogamente a quanto fatto nel par. (2.3.1) una analisi di regressione sulla base del seguente modello:

$$R_k - R_{k-1} = \widehat{a} + \widehat{b}R_{k-1} + e_k \tag{32}$$

ove $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$ sono i parametri della regressione, e_k e $\widehat{\sigma}$ sono rispettivamente i relativi errori e il *mean squared error,* i.e.:

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\sum_k \frac{e_k^2}{n-2}} \tag{33}$$

consente di determinare i parametri q e μ della (7) attraverso la risoluzione del seguente sistema di equazioni che pone a confronto la (31) con la (32):

$$\begin{cases} \widehat{a} = (1 - e^{-q}) \cdot \mu \\ \widehat{b} = (e^{-q} - 1) \end{cases} \Rightarrow$$

Attraverso alcuni semplici passaggi matematici si ottengono i valori dei parametri ricercati:

$$\mu = -\frac{\widehat{a}}{\widehat{b}} \tag{34}$$

$$q = \ln(\widehat{b} + 1)^{-1} \tag{35}$$

Per la stima di σ si utilizza la (33) e si ottiene dopo alcune semplificazioni la seguente relazione:

$$\sigma = \widehat{\sigma}\sqrt{\frac{\ln(\widehat{b} + 1)^2}{\widehat{b}^2 + 2\widehat{b}}} \tag{36}$$

La verifica empirica dell'allertatore, come anticipato, è stato effettuato attraverso l'esame dei diversi casi di abuso di mercato rilevati dalla Consob. Tale verifica empirica ha consentito di identificare l'orizzonte temporale per effettuare la stima di regressione dei dati nel discreto che è risultato pari a 15 giorni di negoziazione. Il valore della variabile casuale normale standardizzata z, che definisce la banda di confidenza di tipo predittivo, è pari a 2,33 e, pertanto, include il 99% dei possibili scenari previsionali della variabile finanziaria.

2.3.3 La calibrazione dell'allertatore sulla concentrazione statica

L'allertatore sulla concentrazione statica di mercato utilizza un indice di entropia, quale variabile finanziaria per rappresentare il livello di concentrazione degli intermediari-negoziatori presenti sul mercato, i.e.

$$\Theta_t = \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} \left(\frac{Q_t(i)}{\mu_t} \right)^{\alpha} \tag{9}$$

e come modello di riferimento una equazione differenziale stocastica, i.e.:

$$d\Theta_t = -\zeta \Theta_t dt + \sigma dW_t \tag{10}$$

versione continua del processo discreto di seguito riportato:

$$\Theta_k - \Theta_{k-1} = -\xi \Theta_{k-1} + \widehat{\sigma} Z_k \tag{11}$$

Nella calibrazione su base giornaliera di questa variabile, ai fini delle determinazione delle soglie dinamiche che definiscono gli *alert,* è opportuno considerare che :

- l'espressione sub (9) per costruzione, al crescere di α, risulta essere maggiormente sensibile agli operatori che intermediano una percentuale elevata dei volumi;
- gli intermediari-negoziatori non operano necessariamente tutti i giorni su uno specifico titolo (c.d. discontinuità operativa). Questa circostanza implica che l'utilizzo di un dato giornaliero sulle quantità negoziate dall'i-esimo intermediario-negoziatore per la costruzione dell'indice e, quindi, della variabile finanziaria che connota l'allertatore, rischia di inserire una forte componente di *noise* che renderebbe di difficile interpretabilità i valori assunti dalla variabile;
- il modello di riferimento è definito dall'equazione differenziale stocastica (10) versione continua del processo discreto autoregressivo (11).

È stato, quindi, seguito il medesimo schema logico-computazionale adottato con riferimento all'allertatore sui volumi. Infatti:

- la banda di confidenza di tipo predittivo, i.e.:

$$P \begin{pmatrix} -z_{\frac{\varkappa}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\zeta} \left(1 - e^{-2\zeta}\right)} + \Theta_{t-1} e^{-\zeta} \leq \\ \leq \Theta_t \leq \\ \leq z_{\frac{\varkappa}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\zeta} \left(1 - e^{-2\zeta}\right)} + \Theta_{t-1} e^{-\zeta} \end{pmatrix} = \varkappa$$

  è stata determinata, sfruttando le proprietà distributive della (10) espresse con riferimento ad una condizione iniziale che rappresenta un orizzonte temporale giornaliero, i.e.:

$$\Theta_t \sim N\left[\Theta_{t-1}e^{-\zeta}; \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\zeta}(1-e^{-2\zeta})}\right] \tag{12}$$

- la stima dei parametri della equazione differenziale stocastica (10), i.e.:

$$\begin{aligned}\zeta &= \ln(\widehat{b}+1)^{-1}\\ \sigma &= \widehat{\sigma}\sqrt{\frac{\ln(\widehat{b}+1)^2}{\widehat{b}^2+2\widehat{b}}}\end{aligned}$$

  è avvenuta attraverso:

  – un'analisi di regressione, applicata al seguente processo discreto, ridefinito a partire dalla (11) in modo da presentare i medesimi parametri distributivi della (10), i.e.:

$$\Theta_k - \Theta_{k-1} = \left(e^{-\zeta}-1\right)\Theta_{k-1} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\zeta}(1-e^{-2\zeta})}Z_k$$

  – alcune manipolazioni algebriche (vedi par. 2.3.1).

L'esame dei diversi casi di abuso di mercato rilevati dalla Consob, filtrati attraverso le caratteristiche di questo allertatore, ha garantito una verifica empirica efficace per la calibrazione dello stesso; in particolare, ha indicato:

- di esaminare le quantità negoziate da ciascun intermediario su un orizzonte temporale di 5 giornate di negoziazione; in tal modo si risolve il problema della discontinuità operativa di alcuni intermediari-negoziatori;
- di utilizzare un valore del parametro α pari a 5 che permette di evidenziare le situazioni caratterizzate da una forte concentrazione;
- che la finestra temporale di riferimento, per effettuare la stima di regressione dei dati nel discreto, sia pari a 15 giornate di negoziazione;
- che il valore della variabile casuale normale standardizzata z, che definisce la banda di confidenza di tipo predittivo, è pari a 2,33 e, pertanto, include il 99% dei possibili scenari previsionali della variabile finanziaria.

L'indicatore viene, quindi, specificato come segue:

$$\Theta_t = \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} \left(\frac{\hat{Q}_t(i)}{\mu_t} \right)^5 \tag{37}$$

ove

$\hat{Q}_t(i) = \sum_{i=1}^{5} Q_{t-5}(i)$ è la quantità complessiva negoziata negli ultimi 5 giorni dall'operatore $i - esimo$.

$\mu_t = \frac{\sum_{i=1}^{n_t} \hat{Q}_t(i)}{n_t}$

Come indicato nel par. 2.2.3, per la concentrazione statica, si calcolano tre allertatori riferiti rispettivamente all'operatività lorda, agli acquisti ed alle vendite degli intermediari-negoziatori, in quanto si ritiene di rappresentare così l'evoluzione della concentrazione statica, anche con riferimento alle direzione che intraprende il mercato. L'*alert* di questa variabile finanziaria scatta nel momento in cui almeno uno degli allertatori supera le relative soglie indicate dalla relativa banda di confidenza predittiva.

2.3.4 La calibrazione dell'allertatore sulla concentrazione dinamica

L'allertatore sulla concentrazione dinamica di mercato utilizza un indice di dissomiglianza quale variabile finanziaria per rappresentare l'evoluzione della operatività dei diversi intermediari-negoziatori, i.e.

$$\Psi_t = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{n}_t} \sum_{i=1}^{\widetilde{n}_t} \widetilde{Q}_t(i)^2} \tag{13}$$

e come modello di riferimento una equazione differenziale stocastica, i.e.:

$$d\Psi_t = -\omega \Psi_t dt + \sigma dW_t \tag{14}$$

versione continua del processo discreto autoregressivo di seguito riportato:

$$\Psi_k - \Psi_{k-1} = -\upsilon \Psi_{k-1} + \widehat{\sigma} Z_k \tag{15}$$

Per la calibrazione su base giornaliera di questa variabile, ai fini delle determinazione delle soglie dinamiche che definiscono gli *alert,* considerate le caratteristiche costruttive dell'allertatore, vale a dire che :

- la variabile $\widetilde{Q}_t(i)$ confronta un dato riferito ad un tempo t con il corrispondente valore osservato in un momento antecedente, i.e. $Q_t(i) - Q_{t-k}(i)$,
- il modello di riferimento è definito dall'equazione differenziale stocastica (14), versione continua del processo discreto autoregressivo (15),

è necessario definire il *lag* temporale della grandezza $\widetilde{Q}_t(i)$ e la finestra temporale di riferimento, per effettuare la stima di regressione dei dati nel discreto funzionale alla specificazione parametrica della (14).

È stato, quindi, seguito il medesimo schema logico-computazionale adottato con riferimento all'allertatore sulla concentrazione statica. Infatti:

- la banda di confidenza di tipo predittivo, i.e.:

$$P\left(\begin{array}{c} -z_{\frac{\varkappa}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\omega}\left(1-e^{-2\omega}\right)}+\Psi_{t-1}e^{-\omega}\leq \\ \leq \Psi_t \leq \\ \leq z_{\frac{\varkappa}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\omega}\left(1-e^{-2\omega}\right)}+\Psi_{t-1}e^{-\omega} \end{array}\right)=\varkappa$$

  è stata determinata, sfruttando le proprietà distributive della (13) espresse con riferimento ad una condizione iniziale che rappresenta un orizzonte temporale giornaliero, i.e.:

$$\Psi_t \sim N\left[\Psi_{t-1}e^{-\omega};\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\omega}(1-e^{-2\omega})}\right] \tag{16}$$

- la stima dei parametri della equazione differenziale stocastica (13), i.e.:

$$\begin{aligned} \omega &= \ln(\widehat{b}+1)^{-1} \\ \sigma &= \widehat{\sigma}\sqrt{\frac{\ln(\widehat{b}+1)^2}{\widehat{b}^2+2\widehat{b}}} \end{aligned}$$

  è avvenuta attraverso:

  - un'analisi di regressione, applicata al seguente processo discreto, ridefinito a partire dalla (15) in modo da presentare i medesimi parametri distributivi della (13), i.e.:

$$\Psi_k-\Psi_{k-1}=\left(e^{-\omega}-1\right)\Psi_{k-1}+\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\omega}(1-e^{-2\omega})}Z_k$$

  - alcune manipolazioni algebriche (vedi par. 2.3.3).

L'esame dei diversi casi di abuso di mercato rilevati dalla Consob, filtrati attraverso le caratteristiche di questo allertatore, ha garantito una verifica empirica efficace per la calibrazione dello stesso; in particolare, ha indicato che:

- la costruzione della variabile $\widetilde{Q}_t(i)$ avvenga confrontando le quantità negoziate da ciascun intermediario al tempo t con il corrispondente valore osservato al tempo $t-5$ (in altri termini il *lag* temporale è pari alla settimana di negoziazione di borsa);
- che la finestra temporale di riferimento per effettuare la stima di regressione dei dati nel discreto sia pari a 15 giornate di negoziazione.

L'indicatore viene pertanto specificato come segue:

$$\Psi_t = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{n}_t}\sum_{i=1}^{\widetilde{n}_t}\left[Q_t(i) - Q_{t-5}(i)\right]^2} \tag{38}$$

Come indicato nel par. 2.2.4, per la concentrazione dinamica si calcolano tre allertatori riferiti rispettivamente all'operatività netta, agli acquisti ed alle vendite degli intermediari-negoziatori, in quanto si ritiene di rappresentare così l'evoluzione della concentrazione dinamica anche con riferimento alle direzione che intraprende in mercato.

L'*alert* di questa variabile finanziaria scatta nel momento in cui almeno uno degli allertatori supera le relative soglie indicate dalla relativa banda di confidenza predittiva.

2.3.5 L'algoritmo per la lettura degli *alert*

Il completamento della calibrazione della procedura di M.A.D. richiede di:

- specificare l'algoritmo che, interpretando congiuntamente i diversi *alert,* individua il *warning* (i.e. il segnale di un potenziale fenomeno di abuso di mercato da esaminare a cura delle unità di *enforcement);*
- definire il periodo di validità temporale del segnale (c.d. periodo critico) vale a dire per quanti giorni successivi il titolo sul quale è stato rilevato un *warning,* deve essere tenuto sotto osservazione dalle unità di *enforcement.*

A tal fine si riepilogano il meccanismo di funzionamento di un generico allertatore e le soglie dinamiche che per ciascuno degli allertatori costruiti, definiscono un andamento anomalo delle diverse variabili finanziarie esaminate.

L'allertatore identifica le soglie dinamiche e, quindi, le anomalie nell'andamento della variabile finanziaria esaminata, su base giornaliera, avendo a riferimento un *set* di osservazioni che scorre nel tempo; in particolare, le soglie dinamiche che, definiscono la banda di confidenza di tipo predittivo per la variabile finanziaria al tempo t sono calcolate con riferimento all'intervallo $[t-k, t]$ dove $k = 15$. Il sistema per l'identificazione degli *alert* è quindi di tipo *rolling* con una finestra di riferimento pari a 15 giornate di negoziazione. Il superamento degli estremi della banda di confidenza di tipo predittivo definiti dal generico allertatore è un segnale di anomalia dell'andamento della relativa variabile finanziaria; di seguito si riepilogano gli estremi delle bande di confidenza che definiscono gli *alert* per ciascuna variabile finanziaria:

1. $Q_t \notin (Q_{\inf}; Q_{\sup})$
   $Q_{\inf} = -z_{\frac{\varkappa}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}\left(1 - e^{-2\theta}\right)} + Q_{t-1}e^{-\theta}$
   $Q_{\sup} = +z_{\frac{\varkappa}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}\left(1 - e^{-2\theta}\right)} + Q_{t-1}e^{-\theta}$

2. $R_t \notin (R_{\inf}; R_{\sup})$
   $R_{\inf} = \mu - z_{\frac{\varkappa}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2q}(1 - e^{-2q})} + (R_{t-1} - \mu)e^{-q}$
   $R_{\sup} = \mu + z_{\frac{\varkappa}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2q}(1 - e^{-2q})} + (R_{t-1} - \mu)e^{-q}$

3. $\Theta_t \notin (\Theta_{\inf}; \Theta_{\sup})$[10]
   $\Theta_{\inf} = -z_{\frac{\varkappa}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\zeta}\left(1 - e^{-2\zeta}\right)} + \Theta_{t-1}e^{-\zeta}$
   $\Theta_{\sup} = +z_{\frac{\varkappa}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\zeta}\left(1 - e^{-2\zeta}\right)} + \Theta_{t-1}e^{-\zeta}$

4. $\Psi_t \notin (\Psi_{\inf}; \Psi_{\sup})$[11]
   $\Psi_{\inf} = -z_{\frac{\varkappa}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\omega}\left(1 - e^{-2\omega}\right)} + \Psi_{t-1}e^{-\omega}$
   $\Psi_{\sup} = +z_{\frac{\varkappa}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\omega}\left(1 - e^{-2\omega}\right)} + \Psi_{t-1}e^{-\omega}$

L'analisi della letteratura e della esperienza di vigilanza hanno indicato che i dati sui volumi di negoziazione, sull'andamento dei rendimenti e sulla evoluzione della concentrazione di mercato vadano esaminati congiuntamente. In questa prospettiva l'osservazione dei diversi casi di abuso di mercato individuati dalla Consob, filtrati attraverso l'applicazione *a-posteriori* della procedura, ha indicato che un algoritmo efficace per la lettura congiunta dei diversi *alert* prodotti dagli allertatori, ai fini dell'identificazione di un *warning* su uno specifico titolo, consiste nel considerare anomala la giornata di negoziazione in cui almeno tre dei quattro allertatori hanno evidenziato un *alert*.

La scelta che siano almeno tre gli allertatori che devono congiuntamente segnare un *alert* per l'identificazione del *warning* su di un titolo è stata, quindi, determinata con l'ausilio della verifica empirica effettuata sulla base dei fenomeni di abuso di mercato esaminati dalla Consob, ma anche secondo una logica di selezione dei fenomeni più rilevanti.

Il periodo critico (vale a dire il periodo di validità del *warning*) è definito dalle cinque giornate di negoziazione successive. Nel caso vi siano più giorni consecutivi con un numero di *alert* superiori a tre, il periodo critico decorre dall'ultimo giorno in cui si è registrato il *warning*.

[10] Questa espressione si riferisce al generico allertatore nella concentrazione statica. Si ricorda, infatti, che per questa variabile finanziaria si calcolano tre allertatori riferiti rispettivamente all'operatività lorda, agli acquisti ed alle vendite degli intermediari-negoziatori. L'*alert* scatta nel momento in cui almeno uno degli allertatori supera le relative soglie indicate dalla banda di confidenza predittiva.

[11] Questa espressione si riferisce al generico allertatore nella concentrazione dinamica. Si ricorda, infatti, che per questa variabile finanziaria si calcolano tre allertatori riferiti rispettivamente all'operatività netta, agli acquisti ed alle vendite degli intermediari-negoziatori. L'*alert* scatta nel momento in cui almeno uno degli allertatori supera le relative soglie indicate dalla banda di confidenza predittiva.

La definizione dell'algoritmo che genera i *warning* per l'interpretazione congiunta degli *alert* prodotti dalle diverse variabili finanziarie completa la descrizione della procedura di M.A.D. sviluppata in questo lavoro.

3 Conclusioni

La definizione di una procedura di M.A.D. rappresenta una esigenza fortemente avvertita da parte delle Autorità di Vigilanza, che trovano in essa uno strumento efficace per la prevenzione e la repressione di condotte illecite riconducibili all'aggiotaggio o all'*insider trading*.

Questo lavoro presenta una procedura di M.A.D. che per ogni titolo e su base giornaliera individua la potenziale presenza di fenomeni di abuso di mercato attraverso un *set* di allertatori che esamina i flussi informativi elementari delle negoziazioni dei titoli sui mercati finanziari disponibili presso un'Autorità di Vigilanza. Questi flussi informativi sono stati trasferiti attraverso l'esame della letteratura, della esperienza di vigilanza e dei casi di abuso di mercato esaminati dalla Consob in quattro processi diffusivi che rappresentano nel tempo l'andamento:

1. dei volumi di negoziazione del titolo;
2. dei rendimenti del titolo;
3. della concentrazione di mercato statica;
4. della concentrazione di mercato dinamica.

In una procedura di M.A.D. un allertatore produce un *alert* ogni qualvolta l'andamento osservato della variabile finanziaria descritta non risulti coerente con le ipotesi predittive del sotteso modello di riferimento identificate mediante soglie dinamiche. La costruzione degli allertatori è stata realizzata nell'ottica di garantire alla procedura una individuazione in tempo reale dei titoli per i quali si è in presenza di potenziali fenomeni di abuso di mercato.

La definizione dei modelli di riferimento, che connotano gli allertatori, è avvenuta attraverso la calibrazione di alcune equazioni differenziali stocastiche.

Individuati i singoli allertatori, è stato calibrato l'algoritmo che ha consentito una interpretazione congiunta dei diversi *alert* per la segnalazione del *warning* sul titolo, vale a dire del segnale di un potenziale fenomeno di abuso di mercato da esaminare a cura delle unità di *enforcement.*

La procedura di M.A.D. rappresenta un primo approccio di analisi quantitativa per la vigilanza sui mercati finanziari. In particolare, si ritiene che la procedura elaborata possa essere migliorata attraverso l'implementazione di nuovi allertatori su altre variabili finanziarie come ad esempio la volatilità, nonché l'esame delle informazioni che caratterizzano il *trading* intra-giornaliero, come ad esempio l'*inter-arrival time*. Si lascia a nuove ricerche il compito di procedere in questi nuovi sviluppi, certi che l'analisi quantitativa rappresenti una soluzione efficace per un migliore svolgimento dei compiti istituzionali attribuiti dal legislatore alle Autorità di vigilanza.

Riferimenti bibliografici

[Bagliano et al., 2001] Bagliano, F., Favero, C. and Nicodano, G. (2001) Illegal insider trading, traded volume and returns: the Italian case. Mimeo.

[Barucci, 2002] Barucci, E. (2002) *Financial Markets Theory*. Springer and Verlag.

[Bhattacharya et al., 2000] Bhattacharya, U., Daouk, H., Jorgenson, B. and Kehr, C. (2001) When an event is not an event: teh curious case of an emerging market. *Jounral of Financial Economics*, 55, pp.69-102.

[Breeden 1979] Breeden, D. (1979) An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Jounral of Financial Economics*, 7, pp. 265-296.

[Campbell et al., 1993] Campbell, J., Grossman, S. and Wang, J. (1993) Trading Volume and Serial Correlation in Stock Returns. *Quartely Journal of Economics*, 108, pp.905-939.

[Chackravarty, 1999] Chakravarty, S. and McConnell, J. (1999) Does insider trading really move stock prices?. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34, 2, pp. 191-209.

[Conrad et al., 1994] Conrad, J., Hameed, A. and Niden, C. (1994) Volume and Autocovariances in Short-Horizon Individual Security Returns. *Journal of Finance*, 49, pp.1305-1329.

[Cornell e Sirri, 1992] Cornell, B. and Sirri, E. (1992) The reaction of investors and stock prices to insider trading. *Journal of Finance*, 47, 3, pp.1031-1059.

[Dixit e Pindyck, 1994] Dixit, A. and Pindyck, R. (1994) Investment under uncertainty, princeton University Press.

[Easley e O'Hara, 1987] Easley, D. and O'Hara, M. (1987) Price, Trade Size, and Information in Securities Markets. *Journal of Financial Economics*, 19, pp.69-90.

[Ethier e Kurtz, 1986] Ethier, S.N. e Kurtz T.G. (1986) Markov Processes: Characterization and Convergence, Wiley, New York NY.

[Fama, 1991] Fama, E. (1991) Efficient Capital Markets: II. *Journal of Finance*, 46, pp.1575-1618.

[Fama e French, 1988] Fama, E. and French, K. (1988) Permanent and Temporary Components of Stock Prices. *Journal of Political Economy*, 96, pp.246-273.

[Foster e Viswanathan, 1993] Foster, D. and Viswanathan, S. (1993) The effect of public information and competition on trading volume and price volatility. *Review of Financial Studies*, 6, pp.23-56.

[Foster e Viswanathan, 1996] Foster, D. and Viswanathan, S. (1996) Strategic trading when agents forecast the forecasts of others. *Journal of Finance*, 51, pp.1437-1478.

[Gallant et al., 1992] Gallant, R., Rossi, P. and Tauchen, G. (1992) Stock prices and volume. *Review of Financial Studies*, 5, pp.199-242.

[Glosten e Milgrom, 1985] Glosten, L. and Milgrom, P. (1985) Bid, Ask and Transaction Prices in a Specialist Market with Heterogeneously Informed Traders. *Journal of Financial Economics*, 14, pp.71-100.

[Greene, 1993] Greene, W.H., (1993) Econometric Analysis, Prentice Hall.

[Grossman, 1989] Grossman, S. (1989) *The Informational Role of Prices*. MIT press, Massachusetts, Boston.

[Harris e Raviv, 1993] Harris and Raviv (1993) Differences of Opinion Make a Horse Race. *Review of Financial Studies*, 6, pp.473-506.

[He e Wang, 1995] He, H. and Wang, J. (1995) Differential Information and Dynamic Behavior of Stock Trading Volume. *Review of Financial Studies*, 8, pp.919-972.

[Jegadeesh, 1990] Jegadeesh, N. (1990) Evidence of Predictable Behavior of Security Returns. *Journal of Finance*, 45, pp.881-898.

[Kandel e Pearson, 1995] Kandel, S. and Pearson, N. (1995) Differential Interpretation of Public Signals and Trade in Speculative Markets. *Journal of Political Economy*, 103, pp.831-872.

[Kim e Verrecchia, 1991] Kim, O. and Verrecchia, R. (1991) Market Reaction to Anticipated Announcements. *Journal of Financial Economics*, 30, pp.273-309.

[Kyle, 1985] Kyle, A. (1985) Continuous Auctions and Insider Trading. *Econometrica*, 53, pp.1315-1334.

[Kyle, 1989] Kyle, P. (1989) Informed Speculation with Imperfect Competition. *Review of Economic Studies*, 56, pp.317-356.

[Lehman, 1990] Lehman, B. (1990) Fads, Martingales, and Market Efficiency. *Quarterly Journal of Economics*, 105, pp.1-28.

[Llorente, et al., 2001] Llorente, G., Michaely, R., Saar, G. and Wang, J. (2001) Dynamic volume-return relation of individual stocks. NBER Working paper 8312.

[Meulbroek, 1992] Meulbroek, L. (1992) An empirical analysis of illegal insider trading. *Journal of Finance*, 47, 5, pp.1661-1699.

[Milgrom e Stockey, 1982] Milgrom, P. and Stokey, N. (1982) Information, Trade and Common Knowledge. *Journal of Economic Theory*, 26, pp.17-27.

[Milia, 2001] Milia C. (2001) L'aggiotaggio: fattispecie tipiche, seminario di studio Consob - CSM

[Minenna, 2001] Minenna M. (2001) Insider trading, abnormal return and preferential information: supervising through a probabilistic approach, quaderni di finanza n. 45, CONSOB e *Journal of Banking and Finance*, 27 (2003), pp.59-86.

[Minenna, 2002] Minenna M. (2002) Inside Insider trading, Risk, March 2002, pp. 93-97.

[Mitchell e Netter, 1994] Mitchell, M.L., Netter J.M., (1994) The role of financial economics in securities fraud cases: applications at the SEC, The Business Layer, February.

[Nelson, 1990] Nelson, D. (1990) ARCH models as diffusion approximations. *Journal of Econometrics*, 45, pp.7-38.

[Roll, 1984] Roll (1984) A Simple Implicit Measure of the Effective Bid-Ask Spread in an Efficient Market. *Journal of Finance*, 39, pp.1127-1139.

[Rubinstein, 1976] Rubinstein, M. (1976) The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options. *Bell Journal of Economics*, 7, pp.407-425.

[Seyhun, 1998] (1998) *Investment Intelligence from Insider Trading*. MIT Press, Massachussets.

[Shalen, 1993] Shalen, C. (1993) Volume, volatility, and the dispersion of beliefs. *Review of Financial Studies*, 6, pp. 405-34.

[Stroock e Varadhan, 1979] Stroock, D.W. e Varadhan S.R.S. (1979) Multidimensional diffusion processes. Springer Verlag, Berlin.

[Tirole, 1982] Tirole, J. (1982) On the Possibility of Speculation under Rational Expectations. *Econometrica*, 50, pp.1163-1181.

[Tuccari, 1999] Tuccari, F. (1999) Seminario sulla manipolazione: l'esperienza di vigilanza. Roma, 4 maggio 1999.

[Wang, 1994] Wang, J. (1994) A Model of Competitive Stock Trading Volume. *Journal of Political Economy*, 102, pp.127-168.

Appendice A

A.1 Il Teorema della Convergenza su $\mathbb{R}^1$

Siano $(\Omega, \Im)$ e $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$ spazi misurabili ove $\mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$ è il *field* di Borel su $\mathbb{R}^1$. Una funzione che realizza la seguente mappatura: $X : \Omega \to \mathbb{R}^1$, vale a dire che assegna $\forall \omega \in \Omega$ un valore $X(\omega)$ di $\mathbb{R}^1$, è detta $(\Im, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$ misurabile, e anche definita come una variabile casuale su $(\Omega, \Im)$, se le pre-immagini[12] dei set misurabili su $\mathbb{R}^1$ sono set misurabili su Ω, e cioè se $\forall \Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$:
$\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \Gamma\} = X^{-1}(\Gamma) \in \Im$

Presa una misura P tale che $P(\Omega) = 1$, la tripla $(\Omega, \Im, P)$ è detto spazio delle probabilità e la funzione P_X definita su $\mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$ tale che $\forall \Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$:

$P_F(\Gamma) = P(X^{-1}(\Gamma)) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \Gamma\}$
è detta distribuzione di probabilità di X.

Per una data X, come appena definita è sempre possibile scegliere uno spazio delle probabilità $(\Omega, \Im, P) = (\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1), P_F)$ ove $X^{-1}(\Gamma) = \omega$ e P_F è la misura di probabilità per X.

Data la tripla $(\Omega, \Im, P)$, sia $\{X_k\}_{k \geq 0}$ un processo discreto di Markov (o catena di Markov discreta), rispetto alla filtrazione $\{\Im_k\}_{k \geq 0}$, generato dalla sequenza di variabili casuali $X_0, X_1, ..., X_k$ per $k \in \mathbb{N}$ ove $X : \Omega \to \mathbb{R}^1$. Pertanto, $\{X_k\}_{k \geq 0}$ assume valori su $\mathbb{R}^1$ ove k è un indicatore del tempo nel discreto. In analogia a quanto precedentemente affermato con riferimento alla generica v.c. X, la coppia $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$ definisce lo spazio misurabile di $\{X_k\}_{k \geq 0}$. Ogni processo discreto di Markov così definito è identificato dalla distribuzione iniziale $v_0(\cdot)$ e dalla probabilità di transizione $\Pi_{1,k}(\cdot, \cdot)$[13] definite su $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$[14], vale a dire:

- $P(X_0 \in \Gamma) = v_0$;
- $P(X_{k+1} \in \Gamma | \Im_k) = P(X_{k+1} \in \Gamma | X_k) = \Pi_{1,k}(X_k, \Gamma)$.

Questo significa che $\Pi_{1,k}(\cdot, \cdot)$ è tale che:

- $\Pi_{1,k}(x, \cdot)$ è una misura di probabilità su $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$ per ogni $x \in \mathbb{R}^1$;
- $\Pi_{1,k}(\cdot, \Gamma)$ è $\mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$ misurabile per tutti i $\Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$.

Si riscala, quindi, il processo discreto di Markov $\{X_k\}_{k \geq 0}$ definendo per ogni $h > 0$ un nuovo processo discreto di Markov $\{X_{kh}\}_{kh \geq 0}$ rispetto alla filtrazione $\{\Im_{kh}\}_{k \geq 0}$, generato dalla sequenza di variabili casuali $X_0, X_h, X_{2h} ...., X_{kh}$ per $k \in \mathbb{N}$ che assume valori su $\mathbb{R}^1$, ove kh è il nuovo indicatore del tempo nel

[12] Per pre-immagini si intende l'inversa della funzione: $X^{-1}(\Gamma)$.

[13] I pedici di Π significano che ci si muove da k con un intervallo temporale pari a 1.

[14] $\Pi_{1,k}(\cdot, \cdot)$ è tale che:
1. $\Pi_{1,k}(x, \cdot)$ è una misura di probabilità su $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$ per ogni $x \in \mathbb{R}^1$;
2. $\Pi_{1,k}(\cdot, \Gamma)$ è $\mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$ misurabile per tutti i $\Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$.

discreto. In altri termini si suddividono i k intervalli temporali in $\frac{1}{h}$ parti di ampiezza h.

Da qui è evidente che per $h \downarrow 0$ i k intervalli temporali vengono suddivisi in infinite parti di medesima dimensione.

Anche questo processo è individuato da una probabilità iniziale $v_0(\cdot)$ ed una probabilità di transizione è $\Pi_{h,kh}(\cdot,\cdot)$[15] definite entrambe su $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$[16]. Da qui che:

- $P(X_0 \in \Gamma) = v_0 \qquad \forall \Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$;
- $P(X_{(k+1)h} \in \Gamma | \Im_{kh}) = P(X_{(k+1)h} \in \Gamma | X_{kh}) = \Pi_{h,kh}(X_{kh}, \Gamma)$.

Sia $D([0,\infty), \mathbb{R}^1) \stackrel{def}{=} \left\{f : [0;\infty) \to \mathbb{R}^1 : \forall t, f(t^+) = f(t) \text{ e } f(t^-) = \text{esiste}\right\}$ lo spazio di skorokhod vale a dire lo spazio che porta da $[0;\infty)$ a $\mathbb{R}^1$ con percorsi continui a destra e finiti a sinistra.

Sia $\left\{X_t^h\right\}$ un processo continuo generato sulla base di $\{X_{kh}\}_{kh \geq 0}$ per $kh \leq t < (k+1)h$ ove t è l'indicatore del tempo nel continuo. Per costruzione $\left\{X_t^h\right\}$ assume valori su D e la coppia $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$ definisce lo spazio misurabile di $\left\{X_t^h\right\}$[17]. In particolare, è evidente che $\left\{X_t^h\right\}$ è una funzione a salti (c.d. *jump chain*) definita dal momento del salto (c.d. *jump time*) che avviene ai tempi $J_{kh} = kh \ \forall\ k \geq 0$, i.e.:

$J_0 = 0, \qquad J_{(k+1)h} = \inf(t \geq J_{kh} : X_t^h \neq X_{kh}) \qquad \forall\ k \geq 0$[18]

ovvero:

$J_0 = 0, \qquad (k+1)h = \inf(t \geq kh : X_t^h \neq X_{kh}) \qquad \forall\ k \geq 0$

ovvero:

$J_0 = 0, \qquad (k+1)h = \sup(k \leq \frac{t}{h} : X_t^h \neq X_{kh}) \qquad \forall\ k \geq 0$[19]

ovvero, definendo $\left[\frac{t}{h}\right] \stackrel{def}{=} \sup(k \leq \frac{t}{h} : X_t^h \neq X_{kh})$:

$J_0 = 0, \qquad J_{(k+1)h} = \left[\frac{t}{h}\right] \qquad \forall\ k \geq 0$

e dal momento di mantenimento del valore (c.d. *holding time*) che ha ampiezza $(k+1)h - kh$ per $k \geq 0$ in cui $\left\{X_t^h\right\} = \{X_{kh}\}$ per $kh \leq t < (k+1)h$.

Per costruzione $\left\{X_t^h\right\}$ per $kh \leq t < (k+1)h$ è un processo continuo di Markov (o catena di Markov continua) rispetto alla filtrazione $\left\{\Im_t^h\right\}_{t\geq 0}$, con distribuzione iniziale P_h^0 e probabilità di transizione P_h definite su $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$.

Da qui che:

- $P(X_0^h = y) = P_h^0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^1$;

[15] I pedici di Π significano che ci si muove da kh con un intervallo temporale pari a h.

[16] $\Pi_{h,kh}(\cdot,\cdot)$ è tale che:
1. $\Pi_{h,kh}(x,\cdot)$ è una misura di probabilità su $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$ per ogni $x \in \mathbb{R}^1$;
2. $\Pi_{h,kh}(\cdot,\Gamma)$ è $\mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$ misurabile per tutti i $\Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$.

[17] Si ricorda che questa ipotesi di spazio misurabile è condizione sufficiente per l'esistenza di una misura di probabilità.

[18] i.e. il più piccolo valore di t per $kh \leq t < (k+1)h$, tale che $X_t^h \neq X_{kh}^h$

[19] i.e. il più grande valore di k per $1 < k \leq \frac{t}{h}$, tale che $X_t^h \neq X_{kh}^h$

- $P(X_t^h = y|\Im_s^h) = P(X_t^h = y|X_s^h = x) = P_h(x,y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$ e $t = s + h$

Per costruzione, inoltre, si hanno le seguenti relazioni tra $\{X_t^h\}$ e $\{X_{kh}\}$:

- $P_h(X_0^h \in \Gamma) = v_0 \qquad \forall \Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$
- $P_h(X_t^h = X_{kh}, \quad \forall\, kh \leq t < (k+1)h) = 1$
- $P_h(X_{(k+1)h} \in \Gamma|\Im_{kh}) = P_h(X_{(k+1)h} \in \Gamma|X_{kh}) = P(X_{(k+1)h} \in \Gamma|X_{kh}) = \Pi_{h,kh}(X_{kh}, \Gamma)$ quasi sicuramente sotto P_h, $\forall k \geq 0$, $\forall \Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$.
- $P_h(X_t^h = X_{(k+1)h}|X_s^h = X_{kh}) = P_h(X_t^h = X_{(k+1)h}|X_s^h = X_{[\frac{t}{h}]h}) = \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(X_{[\frac{t}{h}]h}, X_{(k+1)h})$ ove $t = s + h$[20]

Infine, si definisce $\{X_t\}$ il processo diffusivo caratterizzato dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dX_t = b(x,t)dt + \sigma(x,t)dW_t$$

Nella trattazione successiva si identificano le condizioni per le quali è vero che per $h \downarrow 0$:

$$\{X_t^h\} \xrightarrow{d} \{X_t\}$$

ove il simbolo $\xrightarrow{d}$ indica appunto la convergenza debole.

Si definisce il momento primo condizionale del processo discreto $\{X_k\}_{k \geq 0}$:

$$E(X_{k+1} \in \Gamma|X_k = x) = \sum_k (X_{k+1} - X_k)\Pi_{1,k}(x,\Gamma)$$

Da qui che il momento primo condizionale del processo discreto $\{X_k\}_{k \geq 0}$ espresso in termini del processo $\{X_{kh}\}_{kh \geq 0}$ è[21]:

$$\begin{aligned} E(X_{k+1} \in \Gamma|X_k = x) &= \tfrac{1}{h} E(X_{(k+1)h} \in \Gamma|X_{kh} = x) \\ &= \tfrac{1}{h} \sum_k (X_{(k+1)h} - X_{kh})\Pi_{h,kh}(x,\Gamma) \end{aligned}$$

e, quindi, espresso in termini del processo continuo $\{X_t^h\}$[22]:

$$\begin{aligned} E(X_{k+1} \in \Gamma|X_k = x) &= \tfrac{1}{h} E(X_t^h = y|X_s^h = x) \\ &= \tfrac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} (y - x) P_h(x, dy) \\ &= \tfrac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} (y - x) \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x, dy) \end{aligned}$$

[20] In termini meno formali la prima uguaglianza sfruttando la proprietà di Markov della Jump chain X_t^h si limita ad affermare che tra tutti i valori dell'holding time viene preso quello più prossimo al salto. Ciò in quanto al momento del salto, denotato da $J_{(k+1)h} = [\frac{t}{h}]$, $X_t^h \neq X_{kh}$ e, quindi, $X_s^h = X_{[\frac{t}{h}]h}$.

[21] La moltiplicazione per il fattore $\frac{1}{h}$ è necessaria data la costruzione del processo $\{X_{kh}\}$

[22] L'ultima uguaglianza è garantita dalla relazione [4] esistente tra $\{X_t^h\}$e$\{X_{kh}\}$.

D'ora in avanti ci si concentrerà sui momenti condizionali del processo discreto $\{X_k\}_{k\geq 0}$ espresso in termini di $\left\{X_t^h\right\}$. In particolare, il momento primo condizionale appena definito diventa:

$$b_h(x,t) = \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}(y-x)\Pi_{h,\left[\frac{t}{h}\right]h}(x,dy) \tag{39}$$

il secondo momento condizionale è quindi definito come:

$$a_h(x,t) = \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}(y-x)^2\Pi_{h,\left[\frac{t}{h}\right]h}(x,dy) \tag{40}$$

Si definiscono similmente $\forall\delta > 0$ i momenti presi in valore assoluto di ordine superiore[23]:

$$c_{h,\delta}(x,t) = \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}\left|(y-x)\right|^{2+\delta}\Pi_{h,\left[\frac{t}{h}\right]h}(x,dy) \tag{41}$$

Non è detto che gli integrali di Lebesgue[24] della (39) e della (40) siano finiti; pertanto, considerata la circostanza che la funzione integranda è sempre limitata su intevalli finiti, ne consegue che i relativi momenti troncati, $\forall\varepsilon > 0$:

$$b_h^*(x,t) = \frac{1}{h}\int_{|y-x|\leq\varepsilon}(y-x)\Pi_{h,\left[\frac{t}{h}\right]h}(x,dy) \tag{42}$$

$$a_h^*(x,t) = \frac{1}{h}\int_{|y-x|\leq\varepsilon}(y-x)^2\Pi_{h,\left[\frac{t}{h}\right]h}(x,dy) \tag{43}$$

saranno sicuramente finiti.

In altri termini si integrano la (39) e la (40) su $|y-x| \leq \varepsilon$ invece che su $\mathbb{R}$. Risulta evidente che qualora:

$$\Delta_{h,\varepsilon}(x,t) = \frac{1}{h}\int_{|y-x|>\varepsilon}\Pi_{h,\left[\frac{t}{h}\right]h}(x,dy) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \tag{44}$$

vale a dire che la la probabilità di uno spostamento su $\mathbb{R}$ della catena di Markov $\left\{X_t^h\right\}$ maggiore di ε è nulla, i momenti troncati coincideranno con quelli non troncati.

Ciò premesso si enuncia e si dimostra il seguente teorema:

Teorema 1 *Date le condizioni 1–3, ovvero 1a–3, qui di seguito esplicitate, la sequenza* $\left\{X_t^h\right\}$ *converge debolmente per* $h \downarrow 0$ *al processo* $\{X_t\}$ *avente una distribuzione unica e caratterizzato dalla seguente equazione differenziale stocastica:*

$$dX_t = b(x,t)dt + \sigma(x,t)dW_t \tag{45}$$

[23] Si precisa che non è necessario che $\delta \in \mathbb{N}$. Qualora $\delta \notin \mathbb{N}$ l'espressione di seguito esplicitata non rappresenta un momento condizionale assoluto di ordine superiore.

[24] Si ricorda che l'integrale di Lebesgue e Riemann coincidono, quando esistono.

ove W_t è un moto Browniano standard uni-dimensionale. La distribuzione è indipendente dalla scelta di $\sigma(x,t)$ e $\{X_t\}$ rimane comunque finito all'interno di intervalli di tempo finiti $\forall t \in [0,T]$, i.e.:

$$P\left[|X_t| < \infty\right] = 1$$

Condizione 1 *Esiste $a(x,t)$, misura continua che mappa da $\mathbb{R}^1 \times [0,\infty)$[25] nello spazio $\mathbb{R}^+$[26] ed esiste $b(x,t)$, misura continua che mappa da $\mathbb{R}^1 \times [0,\infty)$ su $\mathbb{R}^1$ tali che $\forall x \in \mathbb{R}^1, \forall T > 0, \forall t \in [0,T]$:*

$$\lim_{h\downarrow 0} |b_h^*(x,t) - b(x,t)| = 0 \tag{46}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} |a_h^*(x,t) - a(x,t)| = 0 \tag{47}$$

$$\lim_{h\downarrow 0} \Delta_{h,\varepsilon}(x,t) = 0 \tag{48}$$

In termini meno formali la (46) richiede che il primo momento condizionale troncato converga per $h \downarrow 0$ ad una funzione $b(x,t)$ che diventerà quindi il primo momento condizionale del processo $\{X_t\}$. *Mutatis mutandis* per la (47). La (48) non è altro che il limite della condizione di convergenza (44) dei momenti troncati.

Si dimostra di seguito come la condizione 1 implichi la seguente condizione 1a, che presenta una maggiore semplicità computazionale i.e.:
Condizione 1a *Se esiste un $\delta > 0$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}^1, \forall T > 0, \forall t \in [0,T]$:*

$$\lim_{h\downarrow 0} c_{h,\delta}(x,t) = 0 \tag{49}$$

allora esiste $a(x,t)$, misura continua che mappa da $\mathbb{R}^1 \times [0,\infty)$ nello spazio $\mathbb{R}^+$ed esiste $b(x,t)$, misura continua che mappa da $\mathbb{R}^1 \times [0,\infty)$ su $\mathbb{R}^1$ tali che $\forall x \in \mathbb{R}^1, \forall T > 0, \forall t \in [0,T]$:

$$\lim_{h\downarrow 0} |b_h(x,t) - b(x,t)| = 0$$

$$\lim_{h\downarrow 0} |a_h(x,t) - a(x,t)| = 0$$

Dimostrazione:
Al fine di verificare che la condizione 1 è equivalente alla condizione 1a è sufficiente dimostrare che:

[25] Lo spazio caratterizzato dai numeri reali per valori compresi da $[0,\infty)$.
[26] Si ricorda che lo spazio $\mathbb{R}^+$ caratterizza i momenti secondi di una qualsiasi variabile casuale.

1. la convergenza a zero dell'ipotesi (49) determina la convergenza a zero dell'ipotesi (48) prevista dalla condizione 1, i.e.:

$$\lim_{h\downarrow 0} c_{h,\delta}(x,t) = 0 \Rightarrow \lim_{h\downarrow 0} \Delta_{h,\varepsilon}(x,t) = 0$$

2. i momenti primo e secondo condizionali, $b_h(x,t)$ e $a_h(x,t)$ indicati nella (39) e nella (40) esistono e sono finiti.

Per quanto riguarda il primo punto, si richiama innanzitutto la diseguaglianza di Markov che vale se X assume valori non negativi[27], i.e.:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Considerato che $|y-x|$ è una variabile a valori sempre positivi, si può specificare la diseguaglianza di Markov per $a = \varepsilon$ e con riferimento alla (44). Il termine di sinistra diventa:

$$P(|y-x| \geq \varepsilon) = \frac{1}{h}\int_{|y-x|>\varepsilon} \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy) = \Delta_{h,\varepsilon}(x,t)$$

mentre il valore atteso è:

$$E(|y-x|) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} |y-x| \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy)$$

Da qui, che per la diseguaglianza di Markov, si ha:

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|>\varepsilon} \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy) \leq \frac{1}{h}\varepsilon^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} |y-x| \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy) \tag{50}$$

Si procede analogamente per la funzione stocastica $|y-x|^{2+\delta}$ e si ottiene:

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|^{2+\delta}>\varepsilon^{2+\delta}} \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy) \leq \frac{1}{h}\varepsilon^{-(2+\delta)}\int_{-\infty}^{\infty} |y-x|^{2+\delta}\, \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy) \tag{51}$$

Si riconosce nel termine di destra il momento condizionale n-esimo, $c_{h,\delta}(x,t)$, di cui alla (41), a meno di un fattore $\varepsilon^{-(2+\delta)}$. Da qui che, utilizzando la (51) si ha:

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|^{2+\delta}>\varepsilon^{2+\delta}} \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy) \leq \varepsilon^{-(2+\delta)} c_{h,\delta}(x,t) \tag{52}$$

[27] Infatti, se X una è variabile stocastica positiva ($X \geq 0$) e $\phi(x)$ la sua densità di probabilità, allora per ogni a,il valore atteso di X è:
$E(X) = \int_0^a x\phi(x)dx + \int_a^\infty x\phi(x)dx \geq \int_a^\infty x\phi(x)dx \geq \int_a^\infty a\phi(x)dx = aP(X \geq a)$
e da qui:$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$
c.v.d.

e considerato che i termini di sinistra della (50) e della (51) sono uguali, i.e.:

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|^{2+\delta}>\varepsilon^{2+\delta}}\Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy)=\frac{1}{h}\int_{|y-x|>\varepsilon}\Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy)=\Delta_{h,\varepsilon}(x,t)\quad(53)$$

si ottiene combinando la (52) e la (53) la seguente diseguaglianza:

$$\Delta_{h,\varepsilon}(x,t)\leq\varepsilon^{-(2+\delta)}c_{h,\delta}(x,t)\quad(54)$$

Considerato che $\varepsilon^{-(2+\delta)}$ è una costante positiva, si ha che se, come previsto dall'ipotesi (49) della condizione 1a:

$$\lim_{h\downarrow 0}c_{h,\delta}(x,t)=0\quad(49)$$

allora anche:

$$\varepsilon^{-(2+\delta)}\lim_{h\downarrow 0}c_{h,\delta}(x,t)=0$$

e, quindi, utilizzando la (54):

$$\lim_{h\downarrow 0}c_{h,\delta}(x,t)=0\Rightarrow\lim_{h\downarrow 0}\Delta_{h,\varepsilon}(x,t)=0$$

Il che equivale a dire che la convergenza a zero dell'ipotesi (49), prevista dalla condizione 1a, determina la convergenza a zero dell'ipotesi (48), prevista dalla condizione 1.
c.v.d.

Per quanto riguarda il secondo punto, per semplicità espositiva si dichiara la seguente espressione:

$$\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}}(y-x)^k\Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy)\quad(55)$$

che per $k=1$, equivale $b_h(x,t)$ e per $k=2$ equivale a $a_h(x,t)$.

Sarà sufficiente verificare per $k=1,2$ che:

a) $\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|\in[0,1]}(y-x)^k\Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy)$ sia finito;

b) $\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|>1}(y-x)^k\Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy)=0$.

Ricordando quanto precedentemente affermato con riferimento all'esistenza dei momenti troncati $\forall\varepsilon>0$, (espressioni sub (42) e sub (43)), prendendo $\varepsilon=1$, la circostanza che il limite di cui sub a) sia finito è immediatamente verificata.

Per quanto concerne la convergenza a zero del limite di cui sub b), si osserva che per $k=1,2$ e per $(y-x)>1$ è sempre verificata la seguente diseguaglianza:

$$(y-x)^k \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy) \leq |y-x|^{2+\delta}\, \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy)$$

Ne consegue che:

$$\frac{1}{h}\int_{|y-x|>1} (y-x)^k \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy) \leq \frac{1}{h}\int_{|y-x|>1} |y-x|^{2+\delta}\, \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy)$$

e, quindi, che:

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|>1} (y-x)^k \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy) \leq \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|>1} |y-x|^{2+\delta}\, \Pi_{h,[\frac{t}{h}]h}(x,dy)$$

considerato che per l'ipotesi (49), prevista dalla condizione 1a, il limite di destra è nullo, allora anche il limite di sinistra è sicuramente nullo.

c.v.d.

Condizione 2 *Per $h \downarrow 0$ la probabilità iniziale del processo $\{X_t\}$ è identica a quella del processo $\{X_t^h\}$*

$$\lim_{h\downarrow 0} P_h(X_0^h \in \Gamma) = v_0 \quad i.e. \quad P(X_0 \in \Gamma) = v_0 \quad \forall \Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$$

La condizione 2 è evidentemente verificata per costruzione.

Le condizioni 1 e 2 non necessariamente garantiscono che il processo $\{X_t\}$ esista. Da qui la necessità di una ulteriore assunzione:

Condizione 3 *v_0, $a(x,t)$ e $b(x,t)$ specificano univocamente la distribuzione del processo $\{X_t\}$, caratterizzato appunto da una distribuzione iniziale v_0, da un momento secondo condizionale $a(x,t)$ e da un momento primo condizionale $b(x,t)$.*

Le condizioni per verificare quest'ultima affermazione sono molteplici e appartengono a risultati standard nella teoria del calcolo stocastico. Si rinvia alla bibliografia per gli approfondimenti [Ethier e Kurtz, 1986, Stroock e Varadhan, 1979].

Considerato che si riconosce nella (45) un generico processo di Ito unidimensionale con parametri $b(x,t)$ e $\sigma(x,t)$[28], per tutto quanto precede il teorema risulta dimostrato.

A.2 Un applicazione: la convergenza di un processo AR(1)

La dimostrazione che segue è facilmente estendibile ai processi sub (2), sub (6) (11) e (15)[29].

[28] Si evidenzia che date le caratteristiche del processo non sono necessarie ulteriori assunzioni per poter affermare che esiste sempre una funzione $\sigma(x,t)$ tale che la seguente eguaglianza risulti sempre verificata:
$a(x,t) = \sqrt{\sigma(x,t)}$

[29] I passaggi intermedi degli sviluppi matematici presentati in questo paragrafo sono disponibili su richiesta.

In particolare, si dà prova, attraverso un'applicazione del teorema di cui al par. A1, che il seguente processo AR(1)

$$X_k - X_{k-1} = \alpha - \gamma X_{k-1} + \widehat{\sigma} Z_k \tag{56}$$

converge debolmente al processo diffusivo $\{X_t\}$ caratterizzato dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dX_t = (\alpha - \theta X_t)\, dt + \sigma dW_t \tag{57}$$

ove α e θ sono funzioni deterministiche del tempo e W_t è un moto Browniano standard uni-dimensionale.

Una prima considerazione sulla (56) è che essendo x_0 una costante e $Z_1, \ldots, Z_k$ una sequenza di variabili aleatorie indipendenti distribuite come una normale con media zero e varianza unitaria, la soluzione $\{X_k\}_{k \geq 0}$ è una catena di Markov rispetto alla filtrazione $\{\Im_k\}_{k \geq 0}$ generata dalla sequenza $Z_1, \ldots, Z_k$ che assume valori su $\mathbb{R}^1$ e ove k è l'indicatore del tempo nel discreto. La coppia $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$ definisce lo spazio misurabile di $\{X_k\}_{k \geq 0}$ ove $\mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$ è il *field* di Borel su $\mathbb{R}^1$. Ogni processo discreto di Markov così definito è identificato dalla distribuzione iniziale $v_0(\cdot)$ e dalla probabilità di transizione $\Pi_{1,k}(\cdot, \cdot)$ definite su $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$[30].

Si riscala quindi il processo discreto di Markov $\{X_k\}_{k \geq 0}$ definendo per ogni $h > 0$ un nuovo processo discreto di Markov $\{X_{kh}\}_{kh \geq 0}$, rispetto alla filtrazione $\{\Im_{kh}\}_{k \geq 0}$, generato dalla sequenza di variabili casuali $Z_0, Z_h, Z_{2h} \ldots, Z_{kh}$, che sono identicamente indipendentemente distribuite come una normale con media zero e varianza pari ad h, per $k \in \mathbb{N}$ che assume valori su $\mathbb{R}^1$, ove kh è il nuovo indicatore del tempo nel discreto. In altri termini si suddividono i k intervalli temporali in $\frac{1}{h}$ parti di ampiezza h, i.e.

$$X_{kh} - X_{(k-1)h} = \alpha_h - \gamma_h X_{(k-1)h} + \widehat{\sigma}\sqrt{h} Z_k$$

oppure

$$X_{kh} - X_{(k-1)h} = \alpha_h - \gamma_h X_{(k-1)h} + \widehat{\sigma} Z_{kh}$$

ove per costruzione $\alpha_h = \alpha \cdot h$ e γ_h dovrà essere tale da garantire la seguente equivalenza:[31]

$$X_k - X_{k-1} = \sum_{j=1}^{\frac{1}{h}} X_{(k-1)+jh} - X_{(k-1)+jh-h}$$

$$\alpha - \gamma X_{k-1} + \widehat{\sigma} Z_k = \sum_{j=1}^{\frac{1}{h}} \alpha \cdot h - \gamma_h X_{(k-1)+jh-h} + \widehat{\sigma} Z_{kh}$$

ove $Z_{kh} \sim N(0, \sqrt{h})$

[30] $\forall \Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$:
1. $P(X_0 \in \Gamma) = v_0$;
2. $P(X_{k+1} \in \Gamma | \Im_k) = P(X_{k+1} \in \Gamma | X_k) = \Pi_{1,k}(X_k, \Gamma)$.

[31] È infatti noto che il riscalamento temporale di una v.c. in $\frac{1}{h}$ parti di ampiezza h avviene attraverso la seguente trasformazione:
$\sqrt{h}Z - \sqrt{h}E(Z) + E(Z)$

È evidente che per $h \downarrow 0$ i k intervalli temporali vengono suddivisi in infinite parti di medesima dimensione.

Anche questo processo è definito da una probabilità iniziale $v_0(\cdot)$ ed una probabilità di transizione è $\Pi_{h,kh}(\cdot,\cdot)$ definite entrambe su $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$[32].

Definito $D([0,\infty), \mathbb{R}^1)$ lo spazio di skorokhod vale a dire lo spazio che porta da $[0;\infty)$ a $\mathbb{R}^1$ con percorsi continui a destra e finiti a sinistra, sia $\left\{X_t^h\right\}$ un processo continuo generato sulla base di $\{X_{kh}\}_{kh \geq 0}$ per $kh \leq t < (k+1)h$ ove t è l'indicatore del tempo nel continuo[33].

$$X_t^h - X_{t-1}^h = \alpha_h - \gamma_h X_{t-1}^h + \widehat{\sigma} Z_t^h \tag{58}$$

Per costruzione $\left\{X_t^h\right\}$ per $kh \leq t < (k+1)h$ è un processo continuo di Markov (o catena di Markov continua) rispetto alla filtrazione $\left\{\Im_t^h\right\}_{t \geq 0}$, con distribuzione iniziale P_h^0, uguale per costruzione a v_0, e probabilità di transizione P_h definite su $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$.[34]

Data la costruzione del processo (58), rispetto al processo (56), per dimostrare la convergenza debole di quest'ultimo alla (57), è sufficiente verificare la convergenza della (58) alla (57). Si dimostra, quindi di seguito attraverso un'applicazione del teorema di cui al par. A1 che la (58) converge debolmente alla (57), i.e.:

$$dX_t = (\alpha - \theta X_t)\, dt + \sigma dW_t \tag{57}$$

Si provano, quindi, di seguito le condizioni previste per l'applicabilità del teorema.

Al fine di verificare la condizione 1a, si esamina innanzitutto la convergenza a zero di un momento in valore assoluto condizionale di ordine superiore al secondo per $h \downarrow 0$; al fine di semplificare i calcoli conviene considerare un momento condizionale di ordine pari, in modo da poter trascurare le problematiche computazionali connesse al valore assoluto.

---

[32] Da qui che:
1. $P(X_0 \in \Gamma) = v_0 \qquad \forall \Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$;
2. $P(X_{(k+1)h} \in \Gamma | \Im_{kh}) = P(X_{(k+1)h} \in \Gamma | X_{kh}) = \Pi_{h,kh}(X_{kh}, \Gamma)$.

[33] Per costruzione $\left\{X_t^h\right\}$ assume valori su D e la coppia $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$ definisce lo spazio misurabile di $\left\{X_t^h\right\}$. In particolare è evidente che $\left\{X_t^h\right\}$ è una funzione a salti (c.d. *jump chain*) definita dal momento del salto (c.d. *jump time*) che avviene ai tempi $J_{kh} = kh \; \forall \; k \geq 0$, e dal momento di mantenimento del valore (c.d. *holding time*) che ha ampiezza $(k+1)h - kh$ per $k \geq 0$ in cui $\left\{X_t^h\right\} = \{X_{kh}\}$ per $kh \leq t < (k+1)h$.

Per quanto precede le funzioni deterministiche α e γ rimangono inalterate.

[34] Da qui che:
1. $P(X_0^h = y) = P_h^0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^1$;
2. $P(X_t^h = y | \Im_s^h) = P(X_t^h = y | X_s^h = x) = P_h(x,y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$ e $t = s + h$

Per le relazioni tra $\left\{X_t^h\right\}$ e $\{X_{kh}\}$ si rinvia al paragrafo A1.

Si definisce il quarto momento condizionale del processo discreto $\{X_k\}_{k\geq 0}$ espresso in termini del processo $\left\{X_t^h\right\}$ come:

$c_{h,1}(x,t) = \frac{1}{h}\mathbf{E}\left[\left(X_{t+1}^h - X_t^h\right)^4 |\Im_t^h\right] =$

Data la (58):

$= \frac{1}{h}\mathbf{E}\left[\left(\alpha_h - \gamma_h X_t^h + \widehat{\sigma} Z_{t+1}^h\right)^4 |\Im_t^h\right] =$

attraverso alcuni passaggi matematici, e utilizzando le proprietà del valore atteso e quelle distributive della sequenza $Z_0^h, Z_1^h, Z_2^h, \ldots, Z_t^h$,[35] si ha:

$= 3\widehat{\sigma}^4 h + 6\alpha^2 h^2 \widehat{\sigma}^2 - 12\alpha h \gamma_h X_t^h \widehat{\sigma}^2 + 6\gamma_h^2 \left(X_t^h\right)^2 \widehat{\sigma}^2 + \alpha^4 h^3 - 4\alpha^3 h^2 \gamma_h X_t^h + 6\gamma_h^2 \alpha^2 \left(X_t^h\right)^2 h - 4\alpha\gamma_h^3 \left(X_t^h\right)^3 + \frac{\gamma_h^4 \left(X_t^h\right)^4}{h}$

Si calcola quindi il limite per $h \downarrow 0$:

$\lim_{h\downarrow 0} c_{h,1}(x,t) =$

$$\lim_{h\downarrow 0} 6\gamma_h^2 \left(X_t^h\right)^2 \widehat{\sigma}^2 - 4\alpha\gamma_h^3 \left(X_t^h\right)^3 + \frac{\gamma_h^4 \left(X_t^h\right)^4}{h} \tag{59}$$

Al fine di verificare la condizione 1a ed assicurare l'esistenza di $a(x,t)$ e di $b(x,t)$, il limite (59) dovrà essere pari a 0. Ciò equivale a dire che la funzione γ_h dovrà essere definita di modo da assicurare tale risultato.

Una volta calcolati anche il momento primo e secondo si definirà opportunamente la funzione γ_h per garantire, attraverso l'applicazione del teorema 1, che la (58) converge debolmente (57).

Si calcola quindi il primo momento condizionale $b_h(x,t)$:

$b_h(x,t) = \frac{1}{h}\mathbf{E}\left[X_{t+1}^h - X_t^h |\Im_t^h\right] =$

Data la (58):

$= \frac{1}{h}\mathbf{E}\left[\alpha_h - \gamma_h X_t^h + \widehat{\sigma} Z_{t+1}^h |\Im_t^h\right] =$

analogamente a quanto fatto con riferimento al momento quarto condizionale si ottiene attraverso alcuni passaggi matematici:

$= \left(\alpha - \frac{\gamma_h}{h} X_t^h\right)$

Si calcola quindi il limite per $h \downarrow 0$:

$\lim_{h\downarrow 0} b_h(x,t) =$

[35] La sequenza $Z_0^h, Z_1^h, Z_2^h, \ldots, Z_t^h$, essendo costituita da variabili casuali identicamente indipendentente distribuite come una normale, presenta momento primo pari a zero, momenti dispari nulli, momento secondo pari a h e quarto pari a $3h^2$.

$$\lim_{h\downarrow 0}\alpha-\frac{\gamma_h}{h}X_t^h \tag{60}$$

Al fine di verificare la condizione 1a la funzione γ_h dovrà essere scelta in modo da garantire che il limite (60) sia pari a $\alpha-\theta X_t$.

Si calcola quindi il momento condizionale secondo $a_h(x,t)$:

$a_h(x,t)=\frac{1}{h}\mathbf{E}\left[\left(X_{t+1}^h-X_t^h\right)^2|\Im_t^h\right]=$

Data la (58):

$=\frac{1}{h}\mathbf{E}\left[\left(\alpha_h-\gamma_h X_t^h+\widehat{\sigma}Z_{t+1}^h\right)^2|\Im_t^h\right]=$

analogamente a quanto fatto con riferimento al momento quarto condizionale si ottiene attraverso alcuni passaggi matematici:

$=\alpha^2h+\frac{\gamma_h^2}{h}\left(X_t^h\right)^2-2\alpha\gamma_h X_t^h+\widehat{\sigma}^2$

Si calcola quindi il limite per $h\downarrow 0$:

$\lim_{h\downarrow 0}a_h(x,t)=$

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{\gamma_h^2}{h}\left(X_t^h\right)^2-2\alpha\gamma_h X_t^h+\widehat{\sigma}^2 \tag{61}$$

Al fine di verificare la condizione 1a la funzione γ_h dovrà essere scelta in modo da garantire che il limite (61) sia pari a σ^2[36].

Al fine di verificare la condizione 1a si deve trovare quindi quella funzione γ_h tale che i limiti (59), (60) e (61) convergano ai valori precedentemente indicati e di seguito ricapitolati, i.e.:

$$\begin{cases}\lim_{h\downarrow 0}6\gamma_h^2\left(X_t^h\right)^2\widehat{\sigma}^2-4\alpha\gamma_h^3\left(X_t^h\right)^3+\frac{\gamma_h^4\left(X_t^h\right)^4}{h}\overset{?}{=}0\\ \lim_{h\downarrow 0}\left(\alpha-\frac{\gamma_h}{h}X_t^h\right)\overset{?}{=}\alpha-\theta X_t\\ \lim_{h\downarrow 0}\frac{\gamma_h^2}{h}\left(X_t^h\right)^2-2\alpha\gamma_h X_t^h+\widehat{\sigma}^2\overset{?}{=}\sigma^2\end{cases}$$

Si definisce $\gamma_h\overset{def}{=}\theta\cdot h$ e si verifica il sistema calcolando i limiti:

$$\begin{cases}\lim_{h\downarrow 0}6\theta^2h^2\left(X_t^h\right)^2\widehat{\sigma}^2-4\theta^3h^3\alpha\left(X_t^h\right)^3+\theta^4h^3\left(X_t^h\right)^4=0\\ \lim_{h\downarrow 0}\left(\alpha-\theta X_t^h\right)=\alpha-\theta X_t\\ \lim_{h\downarrow 0}\theta^2h\left(X_t^h\right)^2-2\alpha\theta hX_t^h+\sigma^2=\sigma^2\end{cases}$$

[36] Si evidenzia che per costruzione del processo X_t^h trovato il valore di γ_h $\widehat{\sigma}=\sigma$.

Da qui che i limiti (59), (60) e (61) convergono alle quantità richieste per il soddisfacimento della condizione 1a. In particolare si ottiene che:

$$b(x,t) = \alpha - \theta X_t \tag{62}$$

$$a(x,t) = \sigma^2 \tag{63}$$

La condizione 2 è evidentemente verificata per costruzione del processo $\left\{X_t^h\right\}$, e conseguentemente risulta verificata anche la condizione 3. Si può quindi applicare il teorema 1 che utilizzando i risultati (62) e (63) consente di concludere che la (58) converge debolmente alla 57.

c.v.d.

A.3 Le proprietà distributive di un processo diffusivo del tipo Ornstein-Uhlenbeck

La dimostrazione che segue è facilmente estendibile ai processi sub (3), sub (7), sub (10) e sub (14)[37].

Sia dato il processo:

$$dX_t = -qX_t dt + \sigma dW_t \qquad q, \sigma > 0 \tag{64}$$

ove $dW_t = \varepsilon dt$ e $\varepsilon \sim N(0,1)$ è il c.d. white noise.

Si prova di seguito che:

$$X_t \sim N\left(e^{-qt}X_0; \sqrt{\sigma^2 \frac{1-e^{-2qt}}{2q}}\right)$$

L'equazione differenziale stocastica è lineare in quanto i coefficienti di dt e dW sono funzioni lineari di X. Inoltre è autonoma in quanto i coefficienti sono indipendenti da t. Un teorema sulle equazioni differenziali stocastiche ci assicura che questa equazione con le suddette caratteristiche ha una soluzione e che questa soluzione è unica, fissata una condizione iniziale $X_0 = x$ con x indipendente da dW.

La soluzione della equazione differenziale stocastica (64) corrisponde alla ricerca della soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{array}{rcl} dX_t & = & -qX_t dt + \sigma dW_t \qquad q, \sigma > 0 \\ X_0 & = & x \end{array} \tag{64}$$

Si definisce $Y_t = X_t e^{qt}$ e si applica, quindi, il lemma di ITO alla (64):

[37] I passaggi intermedi degli sviluppi matematici presentati in questo paragrafo sono disponibili su richiesta.

$d(X_t e^{qt}) = \frac{d}{dt}(X_t e^{qt})dt + \frac{d}{dX}(X_t e^{qt})dX_t + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dX^2}(X_t e^{qt})dX_t^2$
da qui:

$d(X_t e^{qt}) = qX_t e^{qt}dt + e^{qt}dX_t$
e utilizzando la (64):

$d(X_t e^{qt}) = qX_t e^{qt}dt + e^{qt}\left(-qX_t dt + \sigma dW_t\right)$
semplificando e integrando si ha:

$$X_t = \int_0^t \sigma e^{-q(t-s)}dW_s + X_0 e^{-qt} \tag{65}$$

La (65) è la soluzione forte della (64).

Si cerca ora di derivare, avendo a riferimento la (65), la distribuzione di X_t, e i relativi valore atteso e varianza condizionali: $E(X_t|\Im)$ e la $Var(X_t|\Im)$, attraverso la derivazione della funzione generatrice dei momenti di X_t, $M_{X_t}(\gamma) = E(e^{\gamma X_T})$.

A tal fine si definisce $Q_t = e^{\alpha(t)X_t - \beta(t)}$ e si deriva la relativa equazione differenziale stocastica, partendo dalla (64) attraverso la formula di ITO:

$d(e^{\alpha(t)X_t-\beta(t)}) = \left[\frac{d}{dt}\left(\alpha(t)X_t - \beta(t)\right)\right](e^{\alpha(t)X_t-\beta(t)})dt + \alpha(t)(e^{\alpha(t)X_t-\beta(t)})dX_t +$
$+\frac{1}{2}\alpha^2(t)(e^{\alpha(t)X_t-\beta(t)})dX_t^2$

Denotati: $\frac{d}{dt}\alpha(t) = \alpha'(t)$, $\frac{d}{dt}\beta(t) = \beta'(t)$, al fine di derivare $M_{X_t}(\gamma)$, si devono, quindi, individuare le forme funzionali di $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ tali che la seguente espressione risulti nulla:

$[\alpha'(t)X_t e^{\alpha(t)X_t-\beta(t)} - q\alpha(t)X_t e^{\alpha(t)X_t-\beta(t)} + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2(t)e^{\alpha(t)X_t-\beta(t)} - \beta'(t)\cdot$
$\cdot e^{\alpha(t)X_t-\beta(t)}]dt = 0$

Si trova che il valore delle citate funzioni è:

$$\alpha(t) = \gamma e^{-q(T-t)} \tag{66}$$

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2\frac{e^{-2q(T-t)}}{2q} \tag{67}$$

Da qui che:

$d(e^{\alpha(t)X_t-\beta(t)}) = \alpha(t)(e^{\alpha(t)X_t-\beta(t)})\sigma dW_t$
e, utilizzando la (66) e la (67) ed integrando si ha:

$e^{\gamma e^{-q(T-t)}X_t - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2\frac{e^{-2q(T-t)}}{2q}} = \int \gamma e^{-q(T-t)}(e^{\gamma e^{-q(T-t)}X_t - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2\frac{e^{-2q(T-t)}}{2q}})\sigma dW_t$

L'espressione $e^{\gamma e^{-q(T-t)}X_t - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2\frac{e^{-2q(T-t)}}{2q}}$ è una martingala; da qui che al generico tempo t si ha:[38]

[38] Si ricorda, infatti che data M una Martingala rispetto alla filtrazione $\Im$ si ha:

$$E\left[(e^{\gamma e^{-q(T-t)}X_t-\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2\frac{e^{-2q(T-t)}}{2q}})|\Im_0\right]=(e^{\gamma e^{-q(T-0)}X_0-\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2\frac{e^{-2q(T-0)}}{2q}})$$

e al tempo T :

$$E\left[(e^{\gamma e^{-q(T-T)}X_T-\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2\frac{e^{-2q(T-T)}}{2q}})|\Im_0\right]=(e^{\gamma e^{-q(T-0)}X_0-\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2\frac{e^{-2q(T-0)}}{2q}})$$

semplificando e sfruttando le proprietà della funzione esponenziale e del valore atteso e specificando l'espressione per $T=t$ si ha:

$$E\left[e^{\gamma X_t}|\Im_0\right]=e^{\gamma e^{-qt}X_0+\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2\frac{1-e^{-2qt}}{2q}}$$

Allo scopo di ottenere la funzione generatrice dei momenti di X_t, $E(e^{\gamma X_T})$ si applica ulteriormente l'operatore valore atteso e sfruttando le relative proprietà si ha:

$$M_{X_t}(\gamma)=E\left(e^{\gamma X_t}\right)=e^{\gamma e^{-qt}X_0+\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2\frac{1-e^{-2qt}}{2q}} \tag{68}$$

Si riconosce nella (68) la forma della funzione generatrice dei momenti di una distribuzione normale[39]. Da qui che:

$$X_t \sim N\left(e^{-qt}X_0;\sqrt{\sigma^2\frac{1-e^{-2qt}}{2q}}\right)$$

c.v.d.

$E(M_t|\Im_0)=M_0$

[39] Si ricorda, infatti, che data $X_t \sim N(\mu,\sigma^2)$
$M_{X_t}(\gamma)=E\left(e^{\gamma X(t)}\right)=e^{\mu\gamma+\frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2}$

ELENCO DEI PIÙ RECENTI *QUADERNI DI FINANZA* CONSOB

LE PUBBLICAZIONI CONSOB

- RELAZIONE ANNUALE
  Illustra l'attività svolta annualmente dall'Istituto e dà conto delle questioni in corso, degli indirizzi e delle linee programmatiche definite dalla Commissione nelle varie materie di competenza istituzionale.
- BOLLETTINO QUINDICINALE
  Riporta i provvedimenti e le comunicazioni interpretative della Consob nonché altre notizie di pubblica utilità sull'attività istituzionale.
- NEWSLETTER SETTIMANALE *«CONSOB INFORMA»*
  Contiene informazioni, complementari a quelle del Bollettino, sull'attività dell'Istituto e sul mercato mobiliare.
- RACCOLTA NORMATIVA
  Riporta i testi integrati e coordinati delle leggi, dei regolamenti e delle disposizioni di carattere generale della Consob che disciplinano il mercato mobiliare.
- QUADERNI DI FINANZA
  Raccolgono contributi scientifici di approfondimento su materie rilevanti nell'ambito delle competenze istituzionali.

Tutte le pubblicazioni Consob sono naturalmente disponibili anche in formato cartaceo. I canoni annuali di abbonamento ed i prezzi dei singoli fascicoli (ove previsti) per l'anno 2002 sono i seguenti:

- RELAZIONE ANNUALE: € 20,66, estero: € 28,41.
- BOLLETTINO (abbonamento 24 numeri quindicinali + le varie *Edizioni Speciali*): € 180,76, estero: € 196,25; singoli numeri: € 9,30, estero: € 10,33.
- NEWSLETTER SETTIMANALE *«CONSOB INFORMA»* (abbonamento 50 numeri settimanali): via Postel: € 61,97, estero: € 80,05; via fax: € 98,13, estero: € 129,11.
- RACCOLTA NORMATIVA: € 87,80.
- CD-ROM contenente gli Albi: € 103,29.
- QUADERNI DI FINANZA (abbonamento 6 numeri): € 61,97, estero: € 80,57; singoli numeri: € 12,91, estero: € 15,49.

Gli abbonamenti si sottoscrivono facendo pervenire l'importo esatto con assegno bancario sbarrato intestato a Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato - Piazza Verdi, 10 - 00198 ROMA, oppure con versamento sul c/c p. n. 387001 sempre intestato a Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato - Piazza Verdi, 10 - 00198 ROMA.

Ulteriori informazioni su condizioni e modalità di abbonamento:

ISTITUTO POLIGRAFICO E ZECCA DELLO STATO

FUNZIONE EDITORIA, Piazza G. Verdi, 10 - 00198 Roma

E-mail: editoriale@ipzs.it - Sito web: www.ipzs.it

☎ 800-864035 • Fax 06-8508.2520