



Previsioni della Volatilità nei mercati finanziari attraverso approcci Garch Diffusivi

Indice

- Volatilità
- Limite dei Modelli Garch a Processi Diffusivi
- L'Intervallo Predittivo della Volatilità
- Garch Diffusivi vs Misure di Rischio per i Fondi Flessibili
- Conclusioni

2

Indice

- Volatilità
 - Importanza e Relazione con altre Misure di Rischio
 - Variabile Aleatoria e Processo Stocastico

Volatilità: Importanza e Relazione con altre Misure di Rischio

La Volatilità è utilmente impiegata in numerosi problemi di finanza matematica, come ...

Pricing degli Strumenti Derivati

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

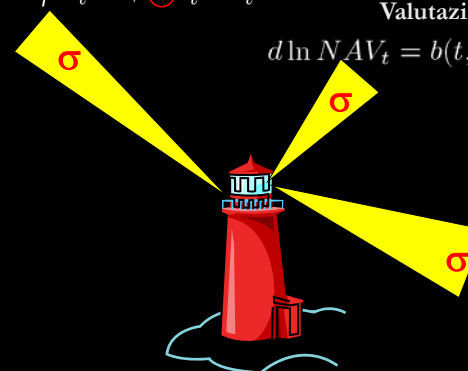
Valutazione del Rischio dei Fondi Comuni

$$d \ln NAV_t = b(t, \ln NAV_t) dt + \sigma(t, \ln NAV_t) dW_t$$

Modelli della Struttura a Termine

$$df_t = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t$$

$$\alpha(t, T) dt = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds$$



3

4

Il valore puntuale della Volatilità può essere calcolato con due metodi alternativi:



Metodo 1: Mis. di Prob. Soggettiva

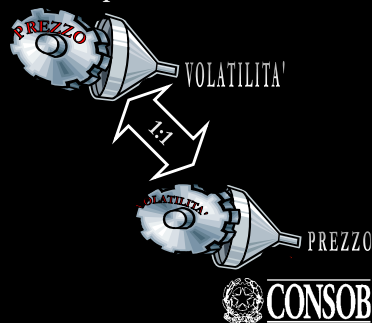
σ = deviazione standard delle osservazioni storiche

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^T \frac{(X_i - \bar{X})^2}{T-1}}$$



Metodo 2: Mis. di Prob. Neutr. al Rischio

σ = valore che eguaglia il prezzo Neutrale al Rischio al prezzo di Mercato



5

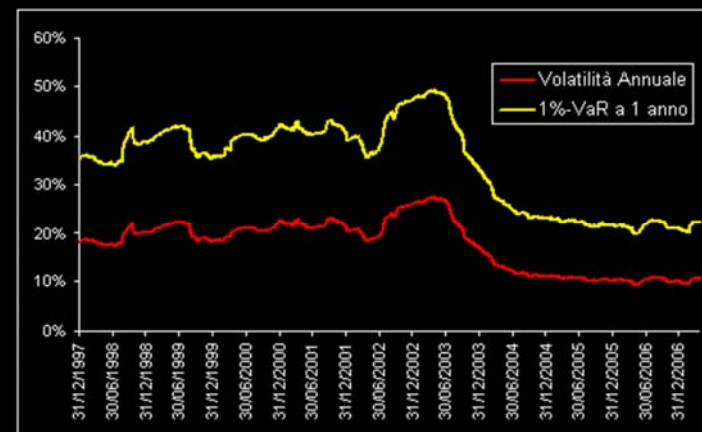
Indice

• Volatilità

- Importanza e Relazione con altre Misure di Rischio
- Variabile Aleatoria e Processo Stocastico

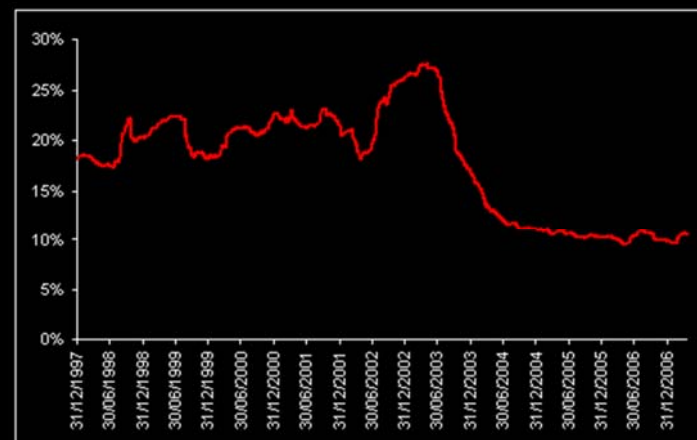
7

La Volatilità ha una stretta corrispondenza con ogni altra misura di rischio, come il *Value-at-Risk (VaR)* e l'*Expected Shortfall (ES)*



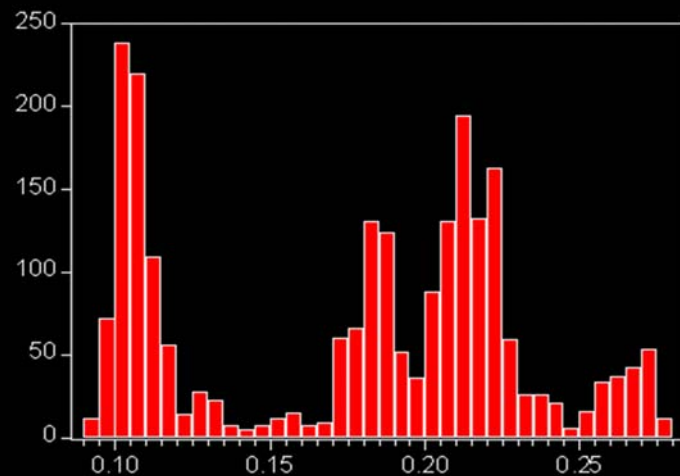
6

Plot della Serie Storica della Volatilità Annuale



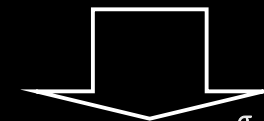
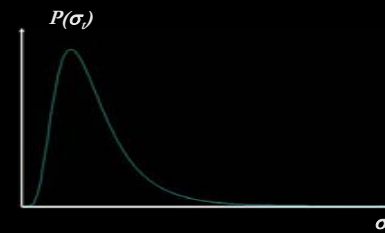
8

Distribuzione di Probabilità Storica della Volatilità Annuale

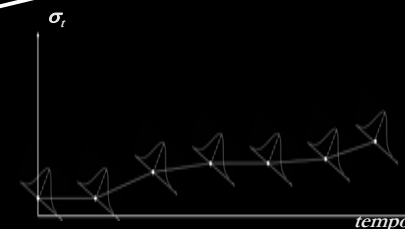


9

La Volatilità è
una *Variabile Aleatoria*

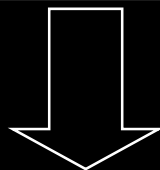


La Serie Storica della Volatilità è
un *Processo Stocastico*

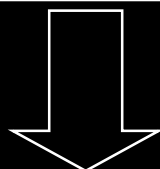


10

Necessità di previsioni della Volatilità basate
su modelli di Volatilità Stocastica



ANALISI DELLE SERIE STORICHE DELLA VOLATILITÀ



MODELLI GARCH

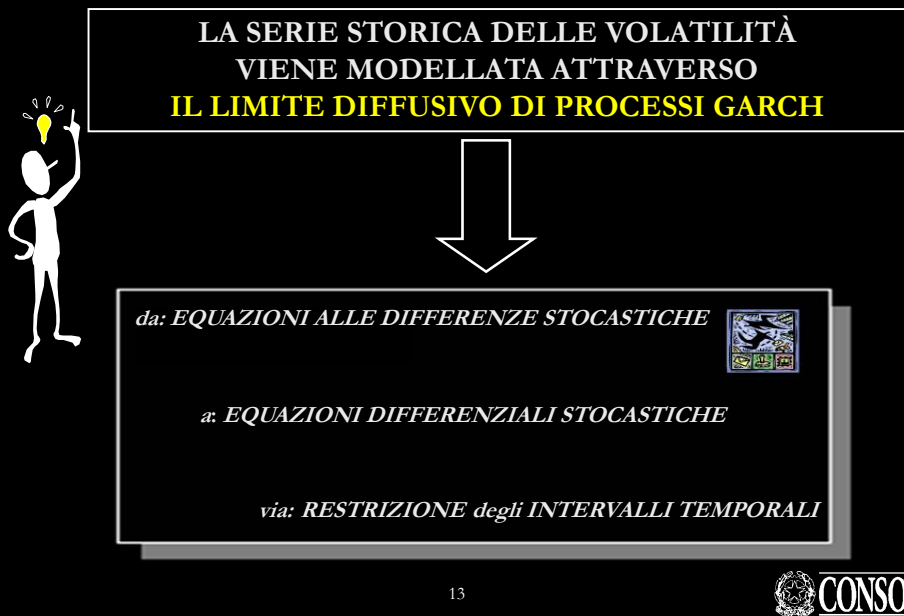
11

Indice

• Limite dei Modelli Garch a Processi Diffusivi

- **Intuizione**
- Il Teorema della Convergenza su R^2
 - L'Enunciato
 - Le Condizioni
- Il Limite Diffusivo dell'M-Garch(1,1)
 - L'Enunciato
 - La Dimostrazione
- Il Limite Diffusivo di altri Modelli Garch

12



La sequenza $\{X_t^h\}$, il cui spazio misurabile è $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}(\mathbb{R}^2))$, converge debolmente per $h \downarrow 0$ al processo $\{X_t\}$ che ha un'unica distribuzione ed è caratterizzato dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dX_t = b(x, t)dt + \sigma(x, t)dW_{2,t}$$

dove $W_{2,t}$ è un moto Browniano standard bidimensionale, se le condizioni 1-4, riportate di seguito, sono soddisfatte.

• Limite dei Modelli Garch a Processi Diffusivi

- Intuizione
- Il Teorema della Convergenza su $\mathbb{R}^2$
 - L'Enunciato
 - Le Condizioni
- Il Limite Diffusivo dell'M-Garch(1,1)
 - L'Enunciato
 - La Dimostrazione
- Il Limite Diffusivo di altri Modelli Garch

Più esplicitamente, la sequenza $\{X_t^h\}$, composta dalle sequenze $\{X_{1,t}^h\}$ e $\{X_{2,t}^h\}$, ciascuna delle quali misurabile sullo spazio $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$, converge debolmente per $h \downarrow 0$ al seguente sistema di equazioni differenziali stocastiche

$$\begin{aligned} dX_{1,t} &= b(x_1, t)dt + \sigma(x_1, t)dW_t \\ dX_{2,t} &= b(x_2, t)dt + \sigma(x_2, t)dW_t^* \end{aligned}$$

dove W_t e W_t^* sono due moti Browniani standard unidimensionali indipendenti tra loro, e $X_{1,t}$ e $X_{2,t}$ sono due processi indipendenti a valori in $\mathbb{R}^1$, se le condizioni 1-4, riportate di seguito, sono soddisfatte.

Il processo $\{X_t\}$ ha una distribuzione indipendente dalla scelta di $\sigma(x, t)$ ed esso assume valori finiti su intervalli di tempo finiti, i.e. $\forall T > 0$:

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|X_t\| < \infty\right) = 1$$

• Limite dei Modelli Garch a Processi Diffusivi

- Intuizione
- **Il Teorema della Convergenza su $\mathbb{R}^2$**
 - L'Enunciato
 - **Le Condizioni**
- Il Limite Diffusivo dell'M-Garch(1,1)
 - L'Enunciato
 - La Dimostrazione
- Il Limite Diffusivo di altri Modelli Garch

CONDIZIONE 1

Se esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$\lim_{h \downarrow 0} \begin{pmatrix} c_{h,\delta}(x_1, t) \\ c_{h,\delta}(x_2, t) \end{pmatrix} = 0$$

allora esistono $a(x, t)$ e $b(x, t)$, misure continue che mappano rispettivamente da $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ nello spazio delle matrici di dimensione 2×2 semi-definite positive, e da $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ in $\mathbb{R}^2$, tali che:

$$\lim_{h \downarrow 0} \begin{pmatrix} b_h(x_1, t) \\ b_h(x_2, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(x_1, t) \\ b(x_2, t) \end{pmatrix}$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \begin{pmatrix} a_h(x_1, t) & a_h((x_1, x_2), t) \\ a_h((x_2, x_1), t) & a_h(x_2, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1, t) & 0 \\ 0 & a(x_2, t) \end{pmatrix}$$

CONDIZIONE 2

Esiste $\sigma(x, t)$, una misura continua che mappa da $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ in $\mathbb{R}^2$ tale che $\forall x_1 \in \mathbb{R}^1, \forall x_2 \in \mathbb{R}^1$, vale:

$$\begin{pmatrix} \sigma(x_1, t) & 0 \\ 0 & \sigma(x_2, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a(x_1, t)} & 0 \\ 0 & \sqrt{a(x_2, t)} \end{pmatrix}$$

CONDIZIONE 3

Per $h \downarrow 0$, X_0^h converge in distribuzione a una variabile aleatoria X_0 che possiede una misura di probabilità ν_0 sullo spazio $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$

CONDIZIONE 4

ν_0 , $a(x, t)$ e $b(x, t)$ specificano univocamente la distribuzione del processo $\{X_t\}$, caratterizzato da una distribuzione iniziale ν_0 , da un momento secondo condizionato $a(x, t)$, e da un momento primo condizionato $b(x, t)$

• Limite dei Modelli Garch a Processi Diffusivi

- Intuizione
- Il Teorema della Convergenza su $\mathbb{R}^2$
 - L'Enunciato
 - Le Condizioni
- Il Limite Diffusivo dell'M-Garch(1,1)
 - L'Enunciato
 - La Dimostrazione
- Il Limite Diffusivo di altri Modelli Garch

Il Limite Diffusivo dell'M-Garch(1,1): **L'Enunciato**

Dato il modello M-GARCH(1,1):

$$\begin{cases} X_k - X_{k-1} = \gamma \cdot (\eta - X_{k-1}) + \sigma_k \tilde{Z}_k \\ \text{e} \\ \ln \sigma_{k+1}^2 - \ln \sigma_k^2 = \beta_0^{(k)} + (\beta_1^{(k)} - 1) \ln \sigma_k^2 + \beta_1^{(k)} \ln Z_k^2 \\ \text{o, equivalentemente:} \\ \ln \sigma_{k+1}^2 - \ln \sigma_k^2 = \beta_0^{(k)} + (\beta_1^{(k)} - 1) \ln \sigma_k^2 + 2\beta_1^{(k)} \ln |Z_k| \end{cases}$$

$\tilde{Z}_k$ e Z_k sono i.i.d. $N(0,1)$

Il Limite Diffusivo dell'M-Garch(1,1): **L'Enunciato**

Dato il modello M-GARCH(1,1):

$$\begin{cases} X_k - X_{k-1} = \gamma \cdot (\eta - X_{k-1}) + \sigma_k \tilde{Z}_k \\ \text{e} \\ \ln \sigma_{k+1}^2 - \ln \sigma_k^2 = \beta_0^{(k)} + (\beta_1^{(k)} - 1) \ln \sigma_k^2 + \beta_1^{(k)} \ln Z_k^2 \\ \text{o, equivalentemente:} \\ \ln \sigma_{k+1}^2 - \ln \sigma_k^2 = \beta_0^{(k)} + (\beta_1^{(k)} - 1) \ln \sigma_k^2 + 2\beta_1^{(k)} \ln |Z_k| \end{cases}$$

$\tilde{Z}_k$ e Z_k sono i.i.d. $N(0,1)$

il suo limite diffusivo è:

$$\begin{aligned} dX_t &= q(\mu - X_t)dt + \sigma_t dW_t \\ d \ln \sigma_t^2 &= (\beta_0 + 2\beta_1 E(\ln |Z_t|) + (\beta_1 - 1) \ln \sigma_t^2) dt + 2\beta_1 \sqrt{\text{Var}(\ln |Z_t|)} dW_t^* \end{aligned}$$

W_t e W_t^* sono $N(0,1)$

• Limite dei Modelli Garch a Processi Diffusivi

- Intuizione
- Il Teorema della Convergenza su $\mathbb{R}^2$
 - L'Enunciato
 - Le Condizioni
- Il Limite Diffusivo dell'M-Garch(1,1)
 - L'Enunciato
 - La Dimostrazione
- Il Limite Diffusivo di altri Modelli Garch

25



Il Limite Diffusivo dell'M-Garch(1,1): La Dimostrazione

STEP 2:

LA COSTRUZIONE DEL PROCESSO $\{\ln \sigma_t^{2h}\}$

Definizione della misura di probabilità P_h sullo spazio di Skorokhod D tale che:

$$P_h(\ln \sigma_0^{2h} \in \Gamma) = \nu_0(\Gamma) \quad \forall \Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$$

$$P_h(\ln \sigma_t^{2h} = \ln \sigma_{kh}^{2h}, \quad \forall kh \leq t < (k+1)h) = 1$$

$$P_h(\ln \sigma_{(k+1)h}^{2h} \in \Gamma | \widehat{\mathfrak{S}}_{kh}) = \Pi_{h,kh}(\ln \sigma_{kh}^{2h}, \Gamma) \text{ q.c. sotto } P_h, \forall k \geq 0, \forall \Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^1)$$



$$\ln \sigma_{t+1}^{2h} - \ln \sigma_t^{2h} =$$

$$\beta_{0h} + (\beta_{1h} - h) \ln \sigma_t^{2h} + 2\beta_{1h} \left\{ \sqrt{h} [\ln |Z_t^h| - E(\ln |Z_t^h|)] + E(\ln |Z_t^h|) \right\}$$

27



Il Limite Diffusivo dell'M-Garch(1,1): La Dimostrazione

STEP 1:

IL RE-SCALING DEL PROCESSO

I k intervalli vengono divisi in $1/b$ sotto-intervalli, ciascuno di lunghezza b



$$\ln \sigma_{(k+1)h}^2 - \ln \sigma_{kh}^2 =$$

$$\beta_{0h} + (\beta_{1h} - h) \ln \sigma_{kh}^2 + 2\beta_{1h} \left\{ \sqrt{h} [\ln |Z_k| - E(\ln |Z_k|)] + E(\ln |Z_k|) \right\}$$

*L'attenzione è rivolta all'equazione alle differenze per la volatilità. Per la convergenza della prima equazione cfr. Minenna 2001

26



Il Limite Diffusivo dell'M-Garch(1,1): La Dimostrazione

STEP 3:

VERIFICA DELLA CONDIZIONE 3 DEL TEOREMA DELLA CONVERGENZA

Individuazione dei valori di β_{0h} e di β_{1h} che garantiscono la convergenza dei momenti condizionati

$$\left. \begin{aligned} \beta_{0h} &:= \beta_0 \cdot h \\ \beta_{1h} &:= \beta_1 \cdot h \end{aligned} \right\} \iff \begin{cases} \lim_{h \downarrow 0} c_{h,1}(\ln \widehat{\sigma}^2, t) = 0 \\ \lim_{h \downarrow 0} b_h(\ln \widehat{\sigma}^2, t) = \beta_0 + 2\beta_1 E(\ln |Z_t|) + (\beta_1 - 1) \ln \sigma_t^2 \\ \lim_{h \downarrow 0} a_h(\ln \widehat{\sigma}^2, t) = 4\beta_1^2 Var(\ln |Z_t|) \end{cases}$$

28



STEP 4:
VERIFICA DELLE CONDIZIONI 2, 3 E 4
DEL TEOREMA DELLA CONVERGENZA



- La Condizione 2 è verificata per ogni $\sigma > 0$, i.e.:

$$\sigma \left(\ln \widehat{\sigma^2}, t \right) = 2\beta_1 \sqrt{\text{Var}(|Z_t|)}$$

- La Condizione 3 è evidentemente soddisfatta per costruzione dal processo $\{\ln \sigma_t^2\}$
- Conseguentemente, anche la Condizione 4 è verificata.

Q.E.D.

• **Limite dei Modelli Garch a Processi Diffusivi**

- Intuizione
- Il Teorema della Convergenza su $\mathbb{R}^2$
 - L'Enunciato
 - Le Condizioni
- Il Limite Diffusivo dell'M-Garch(1,1)
 - L'Enunciato
 - La Dimostrazione
- **Il Limite Diffusivo di altri Modelli Garch**

Procedura Analoga

IL LIMITE DIFFUSIVO DELL' E-GARCH(1,1)

Dato il modello E-GARCH(1,1):

$$\ln \sigma_{k+1}^2 - \ln \sigma_k^2 = \beta_0^{(k)} + \beta_1^{(k)} \ln \sigma_k^2 + \beta_2^{(k)} (|Z_k| + \vartheta Z_k)$$

$Z_k \in N(0,1)$

il suo limite diffusivo è:

$$d \ln \sigma_t^2 = \left[\alpha_0 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\alpha_4 + \frac{\alpha_5}{2} \right) - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_1 - 1 + (\alpha_1 - 1) \ln \sigma_t^2 \right] dt - \frac{\alpha_5}{2} dW_t + \left| \alpha_4 + \frac{\alpha_5}{2} \right| \sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}} dW_t^*$$

Procedura Analoga

IL LIMITE DIFFUSIVO DELL' E-GARCH(1,1)

Dato il modello E-GARCH(1,1):

$$\ln \sigma_{k+1}^2 - \ln \sigma_k^2 = \beta_0^{(k)} + \beta_1^{(k)} \ln \sigma_k^2 + \beta_2^{(k)} (|Z_k| + \vartheta Z_k)$$

$Z_k \in N(0,1)$

il suo limite diffusivo è:

$$d \ln \sigma_t^2 = \left[\alpha_0 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\alpha_4 + \frac{\alpha_5}{2} \right) - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_1 - 1 + (\alpha_1 - 1) \ln \sigma_t^2 \right] dt - \frac{\alpha_5}{2} dW_t + \left| \alpha_4 + \frac{\alpha_5}{2} \right| \sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}} dW_t^*$$

IL LIMITE DIFFUSIVO DELL' L-GARCH(1,1)

Dato il modello L-GARCH(1,1):

$$\sigma_{k+1}^2 - \sigma_k^2 = \omega + \sigma_k^2 (\beta + \varpi Z_k^2 - 1)$$

$Z_k \in N(0,1)$

il suo limite diffusivo è:

$$d\sigma_t^2 = [\omega + \vartheta \sigma_t^2] dt + \sqrt{2\varpi} \sigma_t^2 dW_t$$

• **L'Intervallo Predittivo della Volatilità**

- Le Proprietà dell'Equazione Differenziale Stocastica per l'M-Garch(1,1)
- La Stima dei Parametri dell'Equazione Differenziale Stocastica
- La Determinazione dell'Intervallo

33

• **L'Intervallo Predittivo della Volatilità**

- Le Proprietà dell'Equazione Differenziale Stocastica per l'M-Garch(1,1)
- La Stima dei Parametri dell'Equazione Differenziale Stocastica
- La Determinazione dell'Intervallo

35

PUNTO CHIAVE



Partendo dal Limite Diffusivo del
Processo GARCH
è possibile stabilire
un *Intervallo di Previsione per σ_t*

34

$$d \ln \sigma_t^2 = (\beta_0 + 2\beta_1 E(\ln |Z_t|) + (\beta_1 - 1) \ln \sigma_t^2) dt + 2\beta_1 \sqrt{\text{Var}(\ln |Z_t|)} dW_t^*$$



$$\ln \sigma_t^2 \sim N \left[\left(\ln \sigma_{t-1}^2 + \frac{\beta_0 + 2\beta_1 E(\ln |Z_t|)}{(\beta_1 - 1)} \right) e^{(\beta_1 - 1)} - \frac{\beta_0 + 2\beta_1 E(\ln |Z_t|)}{(\beta_1 - 1)}, \sqrt{\frac{(2\beta_1 \sqrt{\text{Var}(\ln |Z_t|)})^2}{2(\beta_1 - 1)}} (e^{2(\beta_1 - 1)} - 1) \right]$$

36

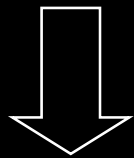
• **L'Intervallo Predittivo della Volatilità**

- Le Proprietà dell'Equazione Differenziale Stocastica per l'M-Garch(1,1)
- **La Stima dei Parametri dell'Equazione Differenziale Stocastica**
- La Determinazione dell'Intervallo

37



Matching dei Primi due Momenti Condizionati



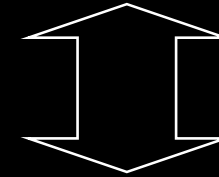
$$\begin{aligned} & \ln \sigma_{k+1}^2 - \ln \sigma_k^2 \\ &= \\ & \left(e^{(\beta_1 - 1)} - 1 \right) \left(\frac{\beta_0 + 2\beta_1 E(\ln |Z_t|)}{(\beta_1 - 1)} \right) + \left(e^{(\beta_1 - 1)} - 1 \right) \ln \sigma_k^2 + 2 \left(e^{(\beta_1 - 1)} - 1 \right) \ln |Z_k| \end{aligned}$$

39



La relazione tra l'Equazione alle Differenze Stocastica e l'Equazione Differenziale Stocastica

$$\ln \sigma_{k+1}^2 - \ln \sigma_k^2 = \beta_0^{(k)} + (\beta_1^{(k)} - 1) \ln \sigma_k^2 + 2\beta_1^{(k)} \ln |Z_k|$$



$$d \ln \sigma_t^2 = \left(\beta_0 + 2\beta_1 E(\ln |Z_t|) + (\beta_1 - 1) \ln \sigma_t^2 \right) dt + 2\beta_1 \sqrt{\text{Var}(\ln |Z_t|)} dW_t^*$$

38



Il Metodo della Massima Verosimiglianza



$$\ln \sigma_{k+1}^2 - \ln \sigma_k^2 = \hat{a} + \hat{b} \ln \sigma_k^2 + e_k$$



$$\beta_0 = f_1(\hat{a}, \hat{b})$$

$$\beta_1 = f_2(\hat{a}, \hat{b})$$

$$2\beta_1 \sqrt{\text{Var}(\ln |Z_t|)} = f_3(\hat{a}, \hat{b}, e_k)$$

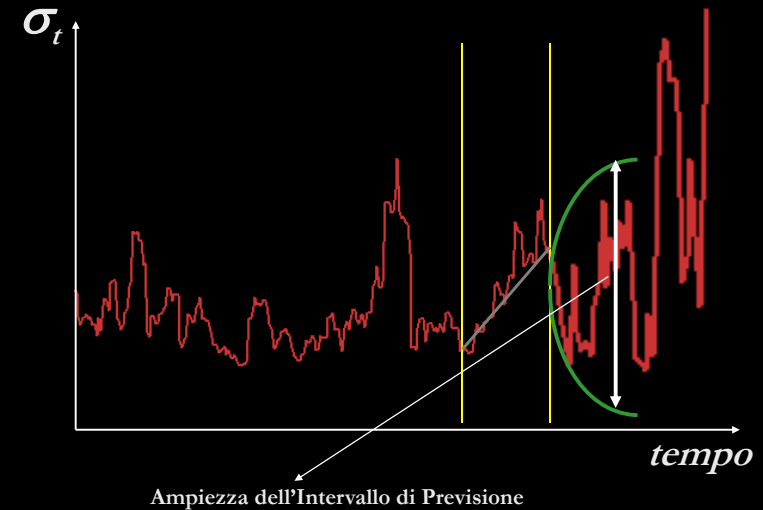
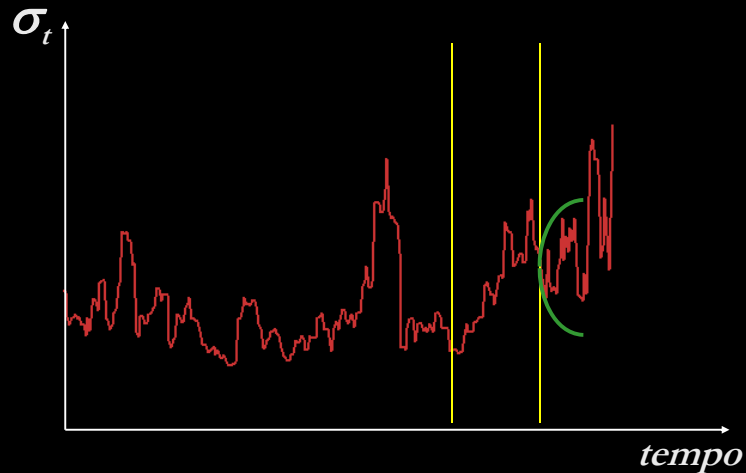
40



• **L'Intervallo Predittivo della Volatilità**

- Le Proprietà dell'Equazione Differenziale Stocastica per l'M-Garch(1,1)
- La Stima dei Parametri dell'Equazione Differenziale Stocastica
- **La Determinazione dell'Intervallo**

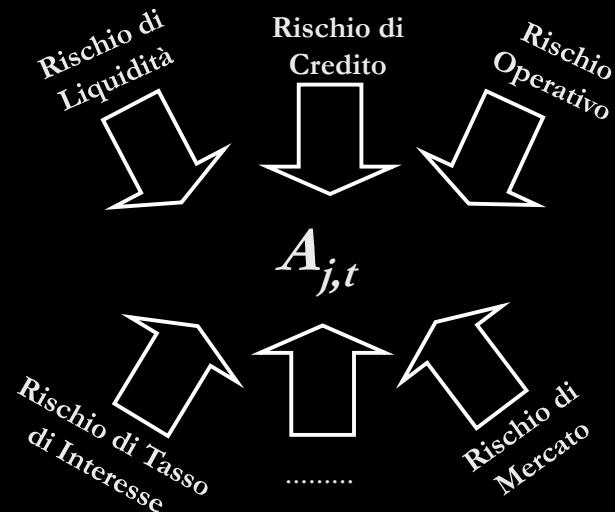
$$P \left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{(2|\beta_1| \sqrt{\text{Var}(\ln|Z_t|)})^2}{2(\beta_1-1)}} (e^{2(\beta_1-1)} - 1) + \left(\ln \sigma_{t-1}^2 + \frac{\beta_0 + 2\beta_1 E(\ln|Z_t|)}{(\beta_1-1)} \right) e^{(\beta_1-1)} - \frac{\beta_0 + 2\beta_1 E(\ln|Z_t|)}{(\beta_1-1)} \right) \leq \ln \sigma_t^2 \leq \left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{(2|\beta_1| \sqrt{\text{Var}(\ln|Z_t|)})^2}{2(\beta_1-1)}} (e^{2(\beta_1-1)} - 1) + \left(\ln \sigma_{t-1}^2 + \frac{\beta_0 + 2\beta_1 E(\ln|Z_t|)}{(\beta_1-1)} \right) e^{(\beta_1-1)} - \frac{\beta_0 + 2\beta_1 E(\ln|Z_t|)}{(\beta_1-1)} \right) \right) = \alpha$$



• Garch Diffusivi vs Misure di Rischio per i Fondi Flessibili

- Concetti Preliminari sui Rischi nei Fondi
- Elementi Definitivi sui Fondi Flessibili
- La Regolamentazione di Trasparenza in Italia
- Misure di Rischio basate sulla Volatilità
- Realizzazione del Rischio e Regolamentazione di Trasparenza
- Analisi Empirica
 - Descrizione della Metodologia
 - Risultati

Ogni *Asset* incorpora molteplici fattori di rischio...

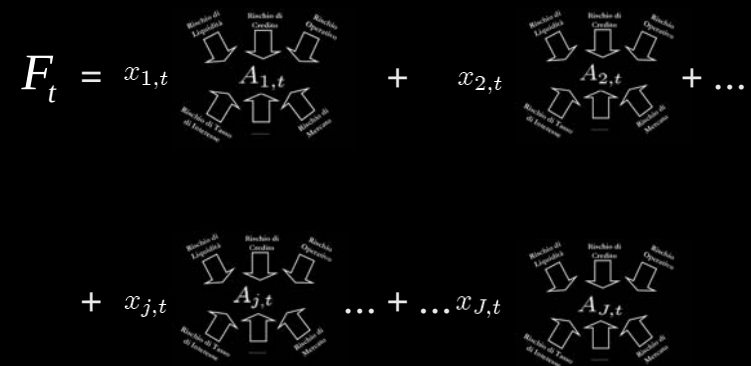


$$F_t = \sum_{j=1}^J x_{j,t} A_{j,t}$$

dove:

- F_t = valore del Fondo al tempo t
- $A_{j,t}$ = valore del j -mo *Asset* al tempo t , ($j=1, 2, \dots, J$)
- $\sum_{j=1}^J x_{j,t} = 1$

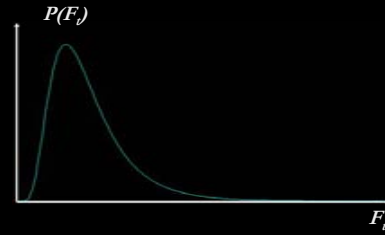
... il Valore del Fondo sintetizza tutti rischi incorporati nei vari *Asset* ...



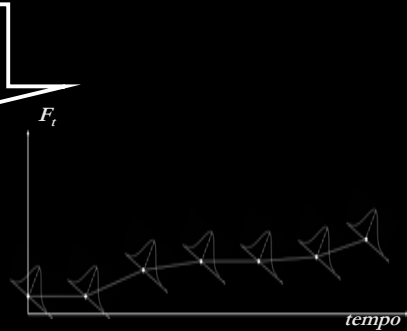
The equation is shown with each asset term $x_{j,t}A_{j,t}$ accompanied by a small diagram of risk factors pointing to the asset value $A_{j,t}$, as detailed in the previous diagram.

$$F_t = x_{1,t}A_{1,t} + x_{2,t}A_{2,t} + \dots + x_{J,t}A_{J,t}$$

... quindi F_t è
una *Variabile Aleatoria*



La Serie Storica di F_t è
un *Processo Stocastico*



49

Il valore della quota del Fondo

$$NAV_t = \frac{\sum_{j=1}^J x_{j,t} A_{j,t}}{S_t^P}$$

S_t^P = numero delle quote in
circolazione al tempo t

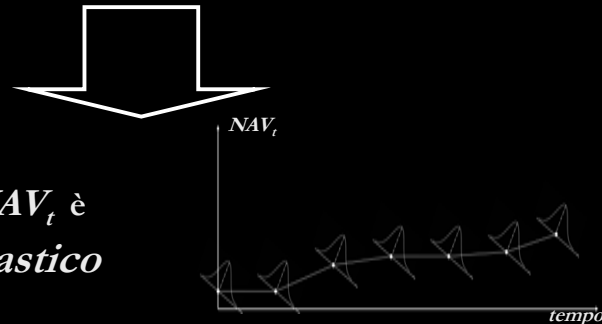
50

Il valore della quota del Fondo

$$NAV_t = \frac{\sum_{j=1}^J x_{j,t} A_{j,t}}{S_t^P}$$

S_t^P = numero delle quote in
circolazione al tempo t

La Serie Storica di NAV_t è
un *Processo Stocastico*



51

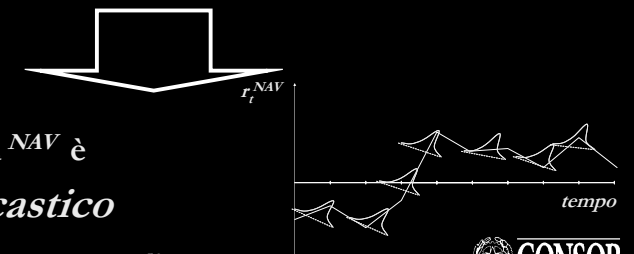
Il rendimento periodale del Fondo

$$r_t^{NAV} = \frac{NAV_t - NAV_s}{NAV_s}$$

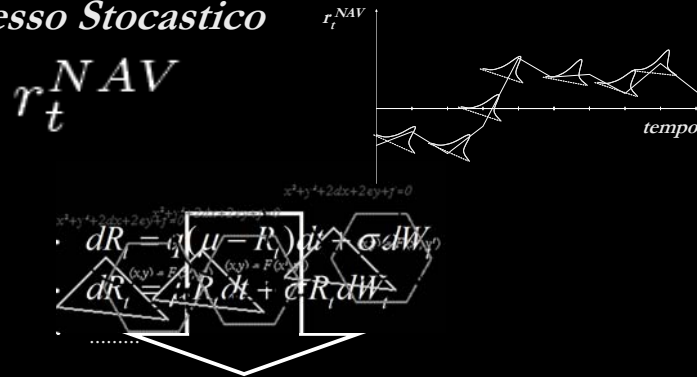
o, equivalentemente, per $t \downarrow s$:

$$r_t^{NAV} = \ln \left(\frac{NAV_t}{NAV_s} \right)$$

La Serie Storica di r_t^{NAV} è
un *Processo Stocastico*



52

Processo Stocastico**MISURAZIONE DEL RISCHIO DEI FONDI**

53

*Il tradizionale*

$$E(r_t^{PF}) = \sum_{j=1}^J x_{j,s} E(r_{A_{j,t}})$$

*approccio**media-varianza:*

$$\sigma^2(r_t^{PF}) = \sum_{j=1}^J x_{j,s}^2 \sigma^2(r_{A_{j,t}}) + 2 \sum_{j \neq l} x_{j,s} x_{l,s} \text{cov}(r_{A_{j,t}}, r_{A_{l,t}})$$

**MISURAZIONE DEL RISCHIO DEL PORTAFOGLIO***attraverso:*

$$\left. \frac{\partial \sigma_{new}^2}{\partial x_{A_{new}}} \right|_{x_{A_{new}}=0} = -2\sigma_{old}^2 + 2\text{cov}(r_{old}, r_{A_{new}})$$

54

**Ma, nel caso dei fondi**

$$\left. \frac{\partial \sigma_{new}^2}{\partial x_{A_{new}}} \right|_{x_{A_{new}}=0} = -2\sigma_{old}^2 + 2\text{cov}(r_{old}, r_{A_{new}})$$

è semplicistico

in quanto:

$$r_t^{PF} \neq r_t^{NAV}$$

55

**Dimostrazione**

$$r_t^{PF} \stackrel{?}{=} r_t^{NAV}$$

$$= \sum_{j=1}^J x_{j,s} r_{A_{j,t}}$$

$$= \frac{NAV_t - NAV_s}{NAV_s}$$

56



Dimostrazione

$$r_t^{PF} \stackrel{?}{=} r_t^{NAV}$$

$$r_t^{PF} = \sum_{j=1}^J x_{j,s} r_{A_{j,t}}$$

$$\sum_{j=1}^J x_{j,s} \left(\frac{A_{j,t} - A_{j,s}}{A_{j,s}} \right)$$

 $\neq$

$$r_t^{NAV} = \frac{NAV_t - NAV_s}{NAV_s} = \frac{\sum_{j=1}^J x_{j,t} A_{j,t} - \sum_{j=1}^J x_{j,s} A_{j,s}}{\sum_{j=1}^J x_{j,s} A_{j,s}}$$

57

Il tradizionale

$$E(r_t^{PF}) = \sum_{j=1}^J x_{j,s} E(r_{A_{j,t}})$$

*approccio**media-varianza:*

$$\sigma^2(r_t^{PF}) = \sum_{j=1}^J x_{j,s}^2 \sigma^2(r_{A_{j,t}}) + 2 \sum_{j \neq l} x_{j,s} x_{l,s} \text{cov}(r_{A_{j,t}}, r_{A_{l,t}})$$



MISURAZIONE DEL RISCHIO DEI FONDI

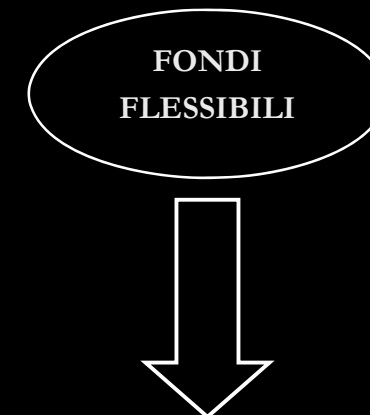
58

Indice

- **Garch Diffusivi vs Misure di Rischio per i Fondi Flessibili**

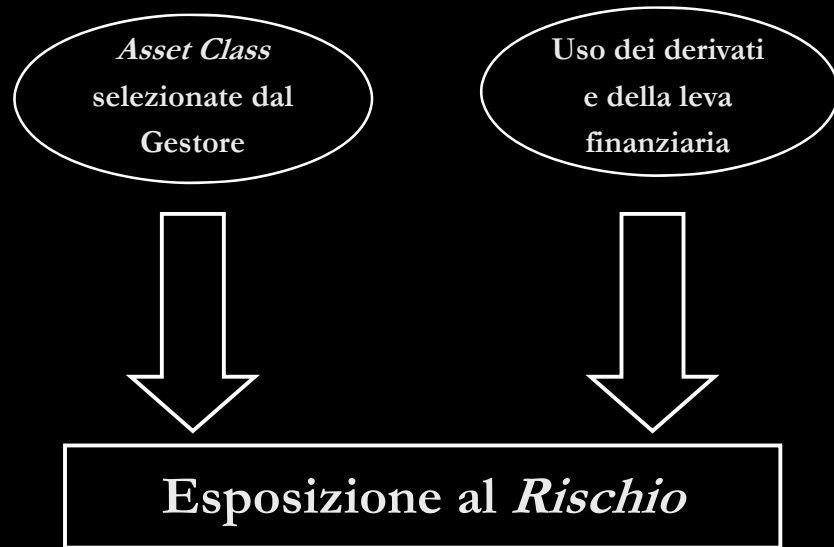
- Concetti Preliminari sui Rischi nei Fondi
- **Elementi Definitivi sui Fondi Flessibili**
- La Regolamentazione di Trasparenza in Italia
- Misure di Rischio basate sulla Volatilità
- Realizzazione del Rischio e Regolamentazione di Trasparenza
- Analisi Empirica
 - Descrizione della Metodologia
 - Risultati

59



**Libertà di investimento in ogni mercato
e in ogni strumento finanziario**

60



61

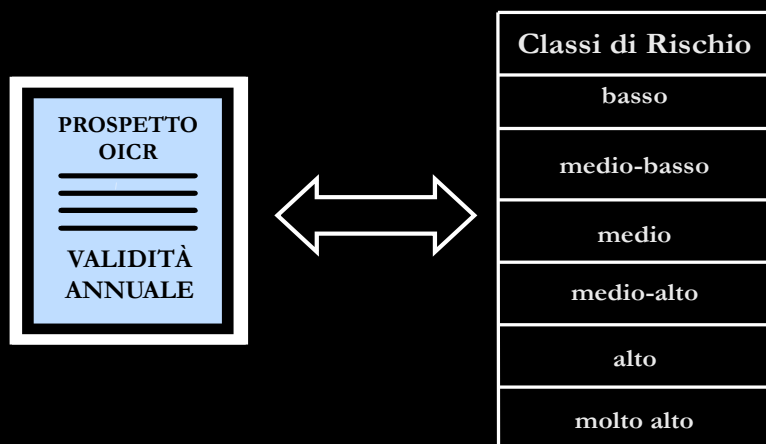
Indice

• **Garch Diffusivi vs Misure di Rischio per i Fondi Flessibili**

- Concetti Preliminari sui Rischi nei Fondi
- Elementi Definitivi sui Fondi Flessibili
- **La Regolamentazione di Trasparenza in Italia**
- Misure di Rischio basate sulla Volatilità
- Realizzazione del Rischio e Regolamentazione di Trasparenza
- Analisi Empirica
 - Descrizione della Metodologia
 - Risultati

62

Ogni fondo deve dichiarare il proprio grado di rischio in termini descrittivi, scegliendo tra sei opzioni ordinate in modo crescente:



63

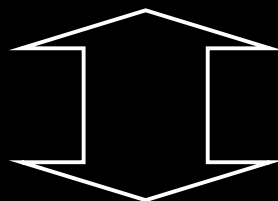
Indice

• **Garch Diffusivi vs Misure di Rischio per i Fondi Flessibili**

- Concetti Preliminari sui Rischi nei Fondi
- Elementi Definitivi sui Fondi Flessibili
- La Regolamentazione di Trasparenza in Italia
- **Misure di Rischio basate sulla Volatilità**
- Realizzazione del Rischio e Regolamentazione di Trasparenza
- Analisi Empirica
 - Descrizione della Metodologia
 - Risultati

64

Ipotesi Fondamentale



La valutazione quantitativa del rischio
si basa su
MISURE DI VOLATILITÀ

65

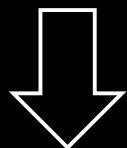
Mapping delle Classi di Rischio Qualitative a corrispondenti Intervalli di Volatilità

66

Step 1: Definizione di Intervalli di Perdita del Fondo

Cos'è la PERDITA in un investimento finanziario?

PRINCIPIO DI NEUTRALITÀ' AL RISCHIO



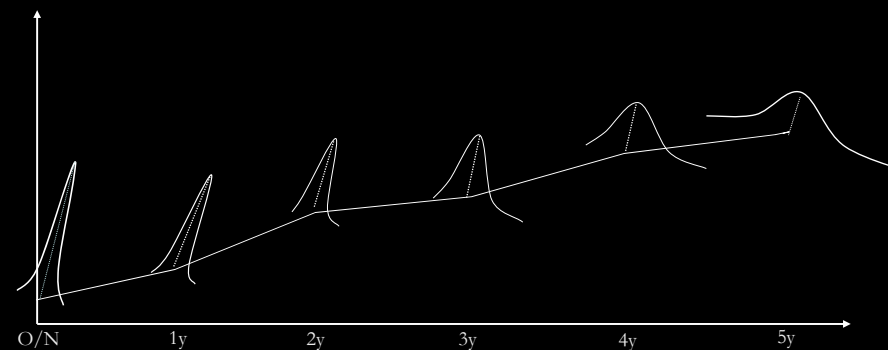
$$\text{PERDITA} \in (-100\%, \overline{r^{rf}}]$$

dove: $\overline{r^{rf}}$ = media della Distribuzione di
Probabilità del tasso *risk-free*

67

Step 1: Definizione di Intervalli di Perdita del Fondo

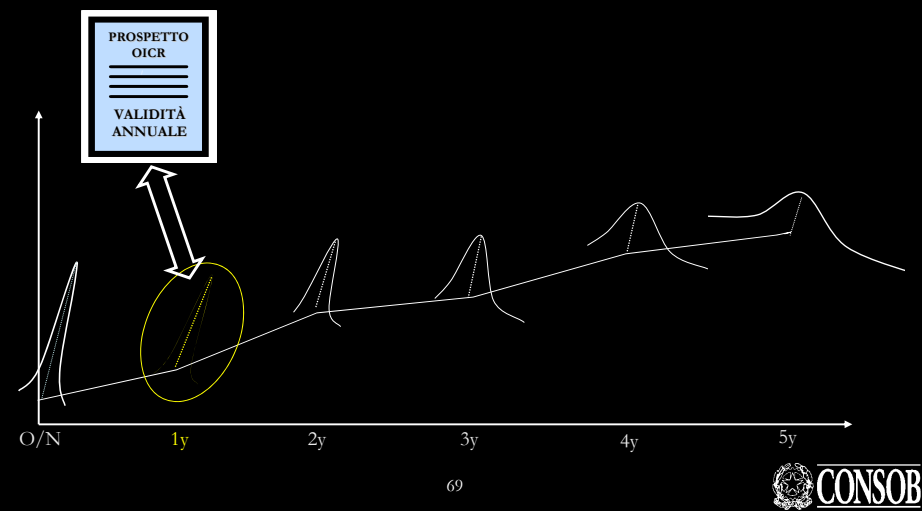
Date la curva dei tassi *risk-free* e la relativa *volatility surface* ...



68

Step 1: Definizione di Intervalli di Perdita del Fondo

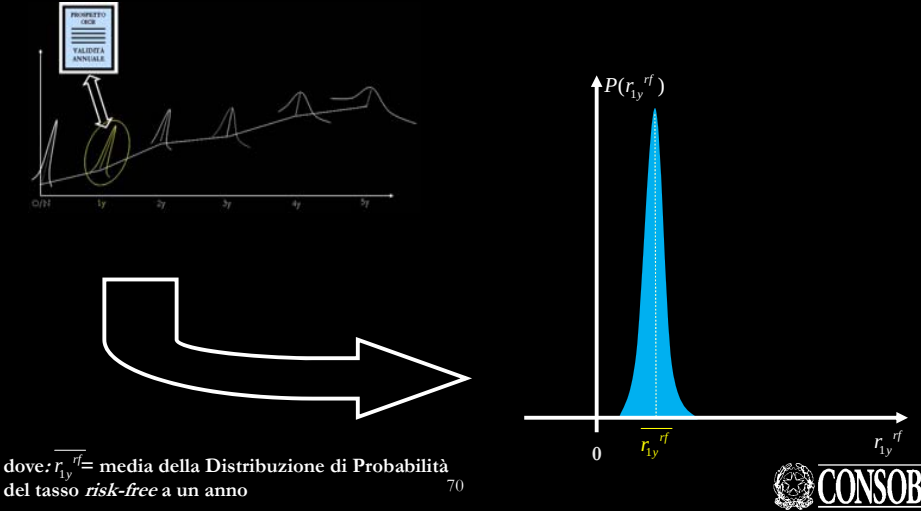
... si seleziona la Distribuzione di Probabilità del tasso *risk-free* a un anno ...



69

Step 1: Definizione di Intervalli di Perdita del Fondo

... si seleziona la Distribuzione di Probabilità del tasso *risk-free* a un anno ...

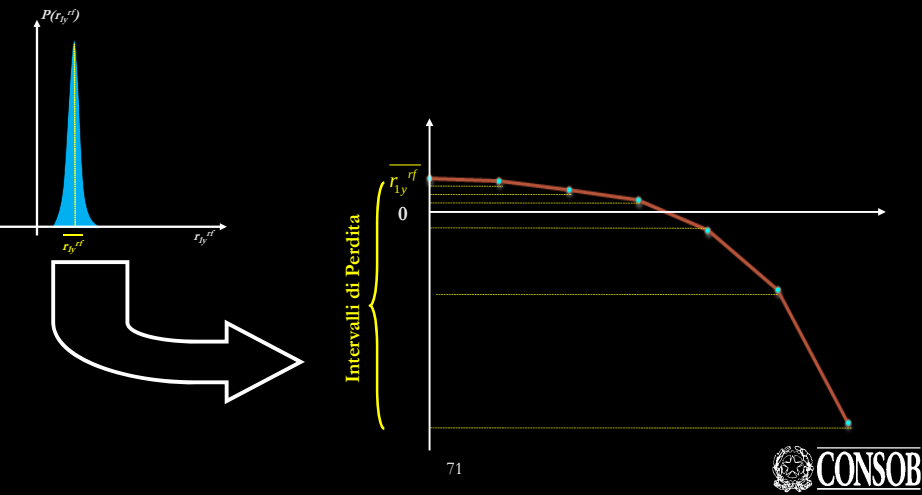


dove: $\overline{r_{1y}^{rf}}$ = media della Distribuzione di Probabilità del tasso *risk-free* a un anno

70

Step 1: Definizione di Intervalli di Perdita del Fondo

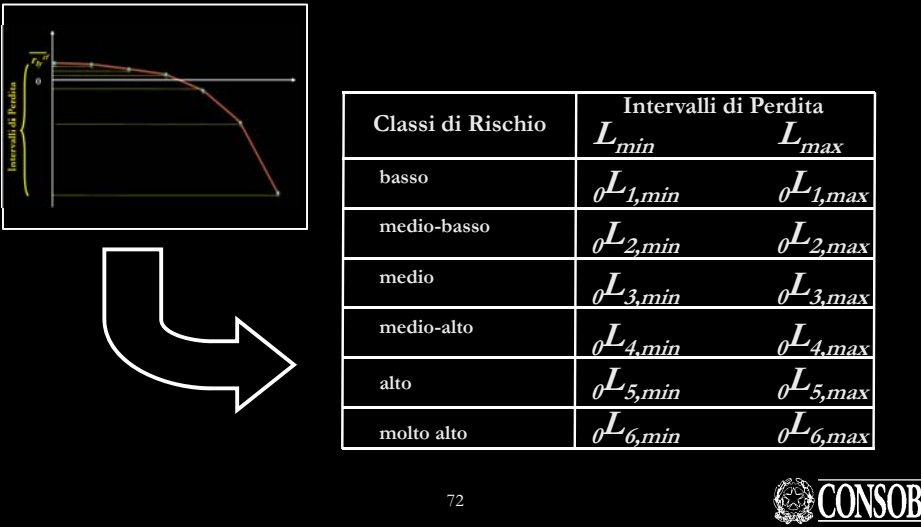
... e ad ogni Classe di Rischio Qualitativa si associa il corrispondente Intervallo di Perdita Annuale del Fondo (multiplo di $\overline{r_{1y}^{rf}}$ secondo una funzione esponenziale) ...



71

Step 1: Definizione di Intervalli di Perdita del Fondo

... ottenendo ...



72

Step 2: Mapping degli Intervalli di Perdita del Fondo
ai corrispondenti Intervalli di Volatilità del Fondo

Classi di Rischio	Intervalli di Perdita	
	L_{min}	L_{max}
basso	$\theta L_{1,min}$	$\theta L_{1,max}$
medio-basso	$\theta L_{2,min}$	$\theta L_{2,max}$
medio	$\theta L_{3,min}$	$\theta L_{3,max}$
medio-alto	$\theta L_{4,min}$	$\theta L_{4,max}$
alto	$\theta L_{5,min}$	$\theta L_{5,max}$
molto alto	$\theta L_{6,min}$	$\theta L_{6,max}$

Step 2: Mapping degli Intervalli di Perdita del Fondo
ai corrispondenti Intervalli di Volatilità del Fondo

Classi di Rischio	Intervalli di Perdita	
	L_{min}	L_{max}
basso	$\theta L_{1,min}$	$\theta L_{1,max}$
medio-basso	$\theta L_{2,min}$	$\theta L_{2,max}$
medio	$\theta L_{3,min}$	$\theta L_{3,max}$
medio-alto	$\theta L_{4,min}$	$\theta L_{4,max}$
alto	$\theta L_{5,min}$	$\theta L_{5,max}$
molto alto	$\theta L_{6,min}$	$\theta L_{6,max}$

$$dR = q(\mu - R_t)dt + \sigma \sqrt{R_t} dW_t$$

$$dR = \mu R_t dt + \sigma R_t dW_t$$

Step 2: Mapping degli Intervalli di Perdita del Fondo
ai corrispondenti Intervalli di Volatilità del Fondo

Classi di Rischio	Intervalli di Perdita	
	L_{min}	L_{max}
basso	$\theta L_{1,min}$	$\theta L_{1,max}$
medio-basso	$\theta L_{2,min}$	$\theta L_{2,max}$
medio	$\theta L_{3,min}$	$\theta L_{3,max}$
medio-alto	$\theta L_{4,min}$	$\theta L_{4,max}$
alto	$\theta L_{5,min}$	$\theta L_{5,max}$
molto alto	$\theta L_{6,min}$	$\theta L_{6,max}$

$$dR = q(\mu - R_t)dt + \sigma \sqrt{R_t} dW_t$$

$$dR = \mu R_t dt + \sigma R_t dW_t$$

Classi di Rischio	Intervalli di Volatilità	
	σ_{min}	σ_{max}
basso	$\theta \sigma_{1,min}$	$\theta \sigma_{1,max}$
medio-basso	$\theta \sigma_{2,min}$	$\theta \sigma_{2,max}$
medio	$\theta \sigma_{3,min}$	$\theta \sigma_{3,max}$
medio-alto	$\theta \sigma_{4,min}$	$\theta \sigma_{4,max}$
alto	$\theta \sigma_{5,min}$	$\theta \sigma_{5,max}$
molto alto	$\theta \sigma_{6,min}$	$\theta \sigma_{6,max}$

*Il pedice θ che precede la volatilità indica che si tratta dell'intervallo iniziale, i.e. *ante* calibrazione

Step 3: Calibrazione degli Intervalli

REQUISITI

- *Capacità di riflettere in modo robusto e significativo il grado di rischio “tipico” della corrispondente Classe Qualitativa*
- *Stabilità nel tempo anche a fronte di significative variazioni della curva dei tassi*

Step 3: Calibrazione degli Intervalli

REQUISITI

- Capacità di riflettere in modo robusto e significativo il grado di rischio “tipico” della corrispondente Classe Qualitativa
- Stabilità nel tempo anche a fronte di significative variazioni della curva dei tassi

STRUMENTI

- Modelli GARCH Diffusivi
- Tecniche di Programmazione Stocastica Non-Lineare

Step 3: Calibrazione degli Intervalli

REQUISITI

- Capacità di riflettere in modo robusto e significativo il grado di rischio “tipico” della corrispondente Classe Qualitativa
- Stabilità nel tempo anche a fronte di significative variazioni della curva dei tassi

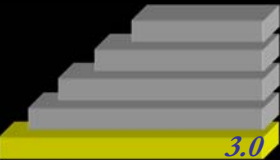
STRUMENTI

- Modelli GARCH Diffusivi
- Tecniche di Programmazione Stocastica Non-Lineare



Intervento di *fine-tuning* sugli Intervalli di Volatilità

Step 3: Calibrazione degli Intervalli

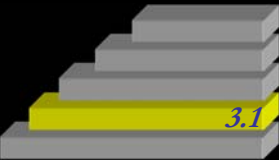


Selezione di un Intervallo iniziale di Volatilità

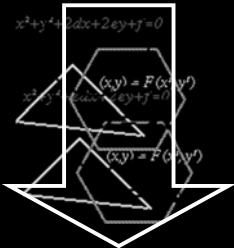
Classi di Rischio	Intervalli di Volatilità	
	σ_{min}	σ_{max}
basso	$\theta\sigma_{1,min}$	$\theta\sigma_{1,max}$
medio-basso	$\theta\sigma_{2,min}$	$\theta\sigma_{2,max}$
medio	$\theta\sigma_{3,min}$	$\theta\sigma_{3,max}$
medio-alto	$\theta\sigma_{4,min}$	$\theta\sigma_{4,max}$
alto	$\theta\sigma_{5,min}$	$\theta\sigma_{5,max}$
molto alto	$\theta\sigma_{6,min}$	$\theta\sigma_{6,max}$



Step 3: Calibrazione degli Intervalli



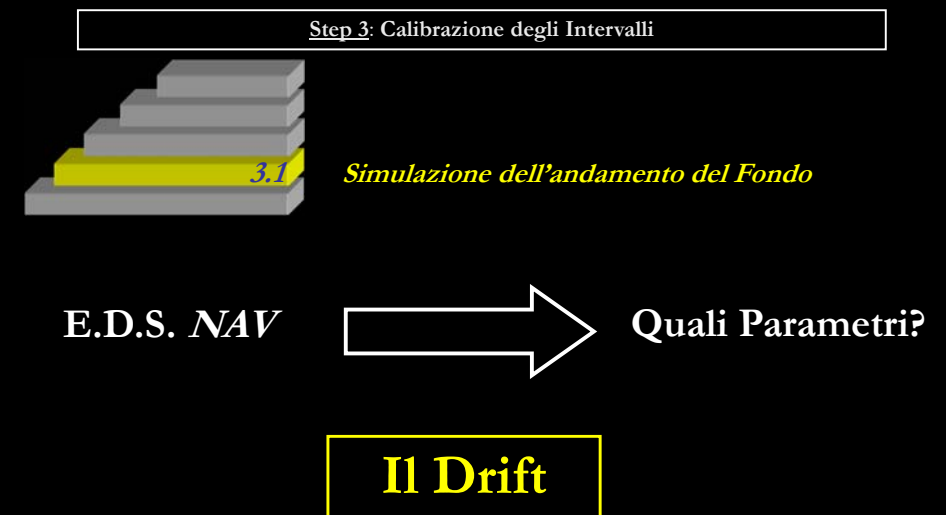
Simulazione dell'andamento del Fondo



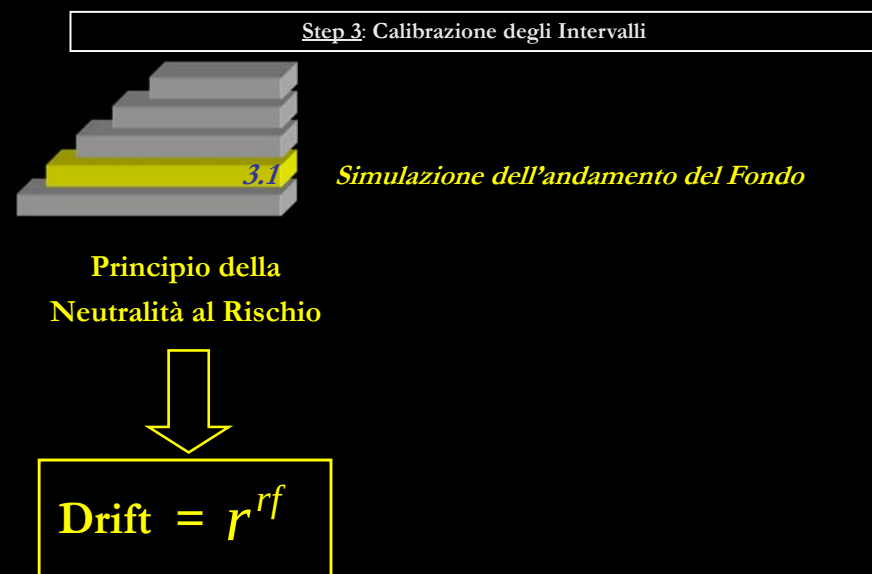
Equazione Differenziale Stocastica del NAV



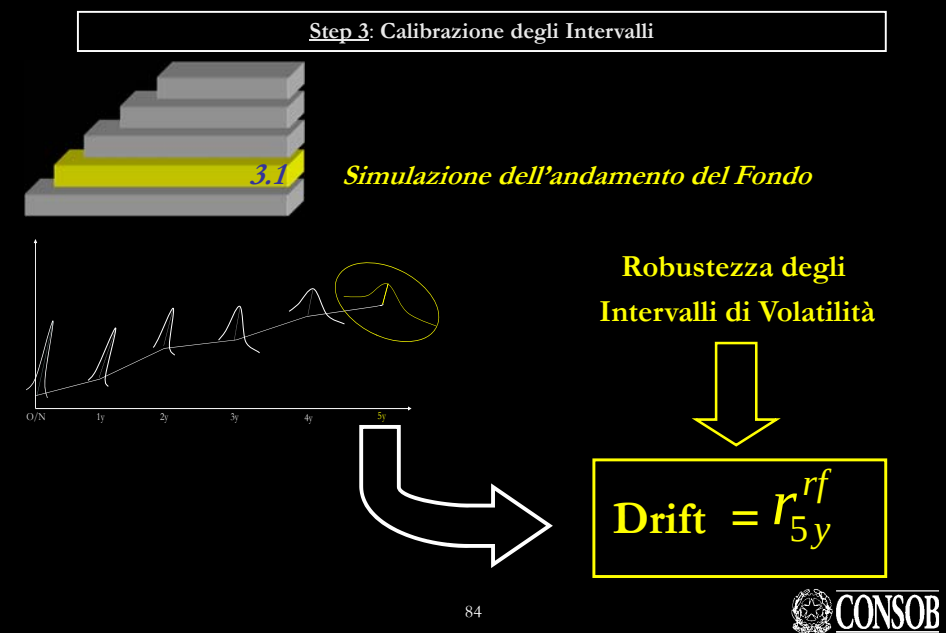
81



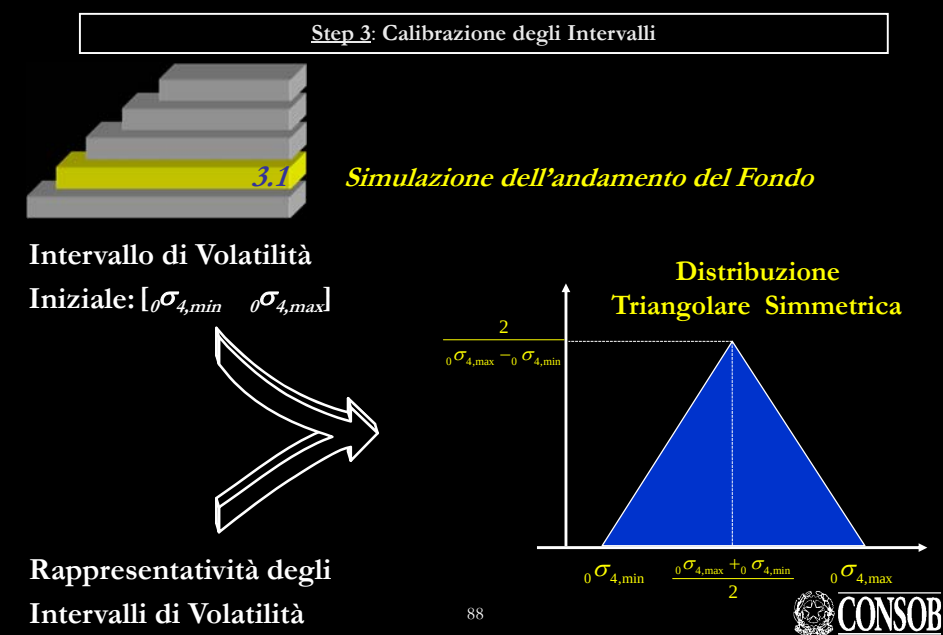
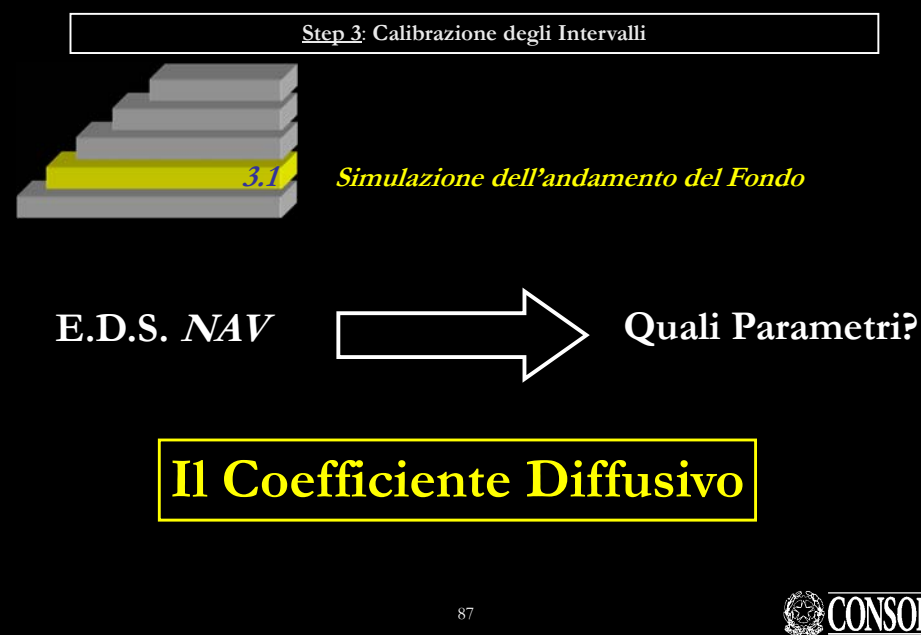
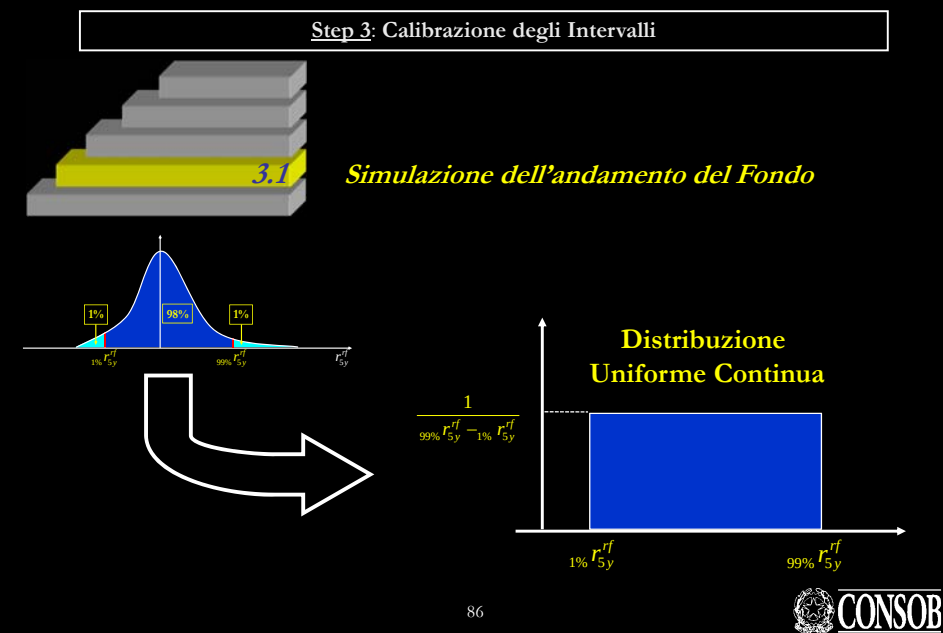
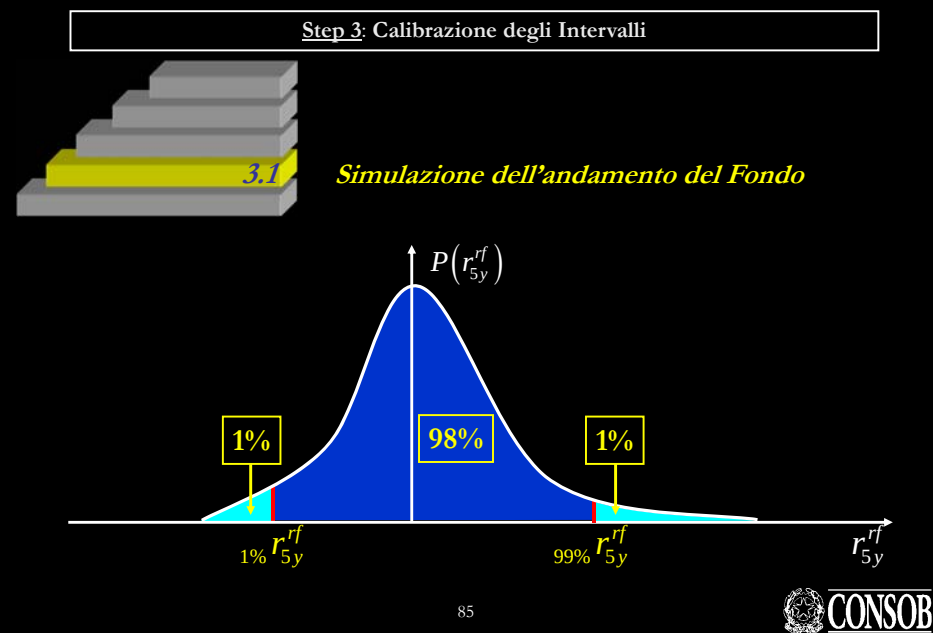
82



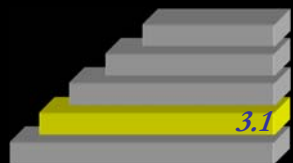
83



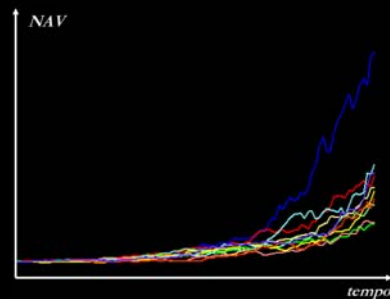
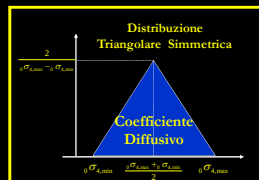
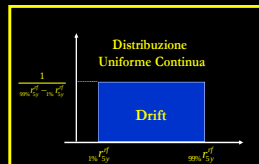
84



Step 3: Calibrazione degli Intervalli

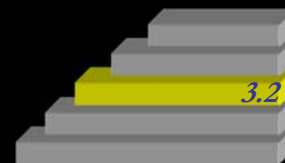


Simulazione dell'andamento del Fondo

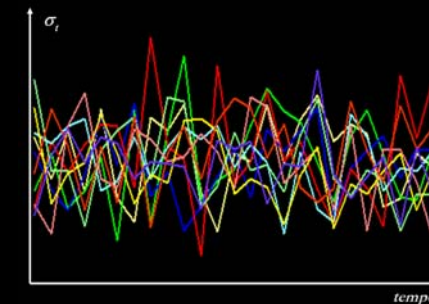
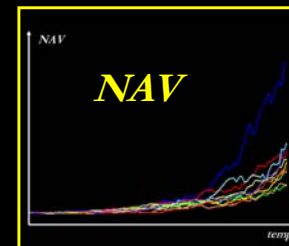


89

Step 3: Calibrazione degli Intervalli

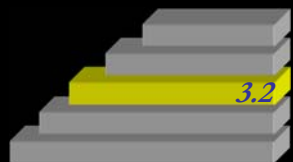


Calcolo della Serie Storica della Volatilità Annualizzata

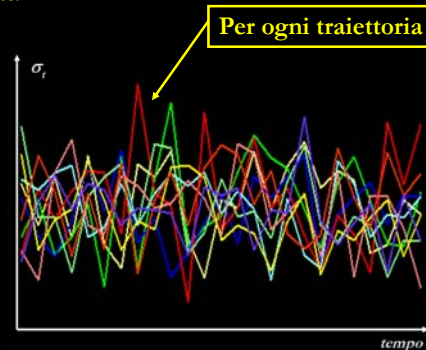
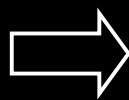
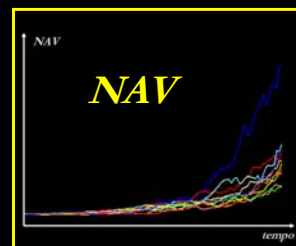


90

Step 3: Calibrazione degli Intervalli

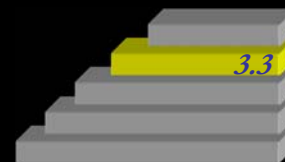


Calcolo della Serie Storica della Volatilità Annualizzata

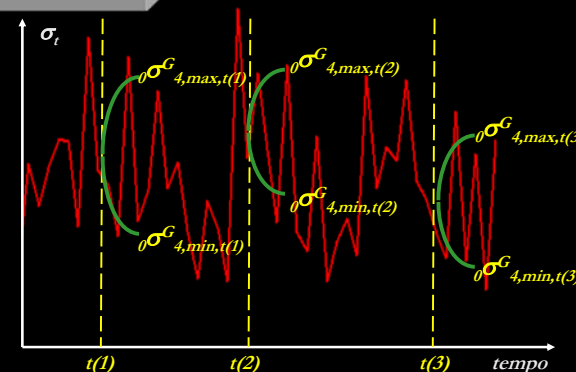


91

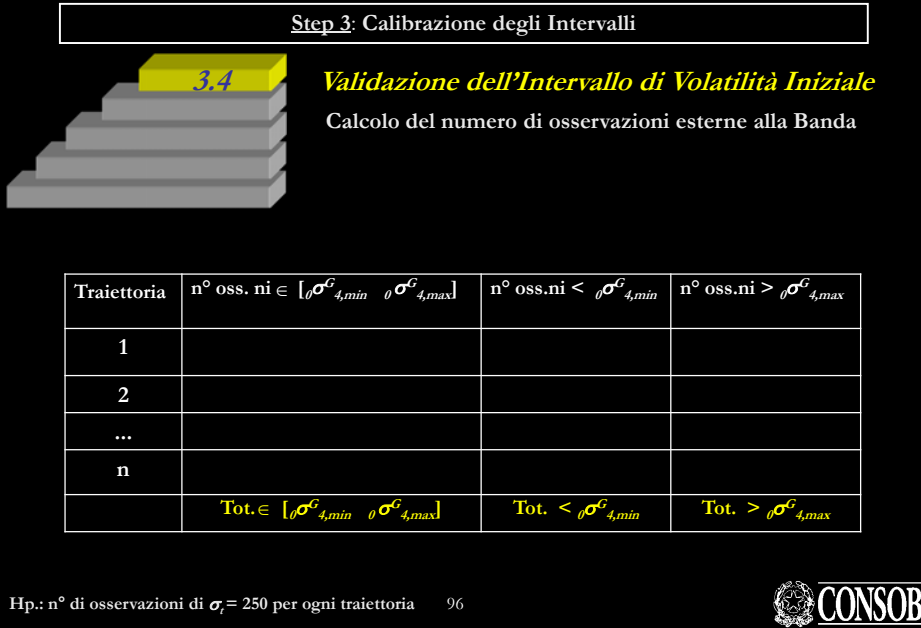
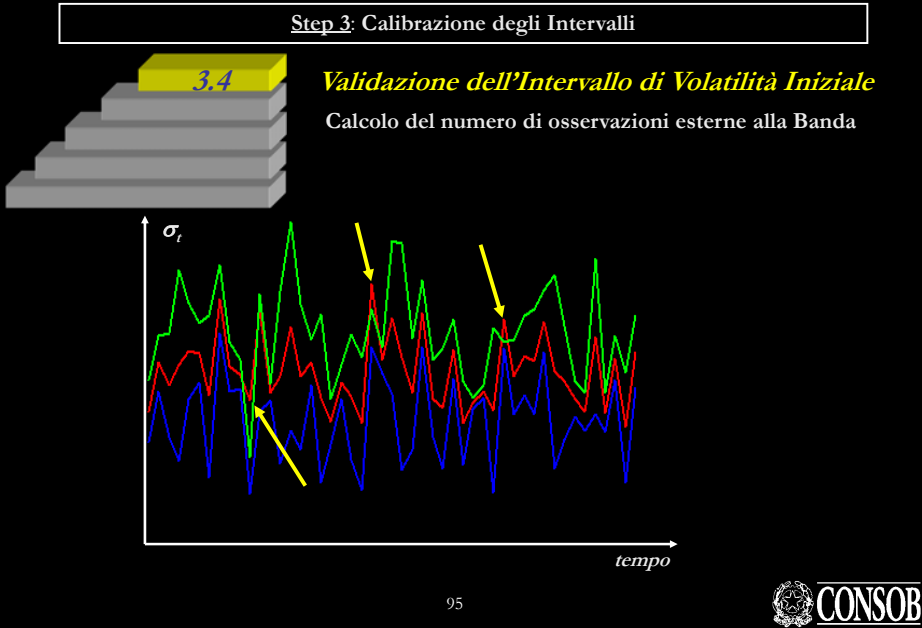
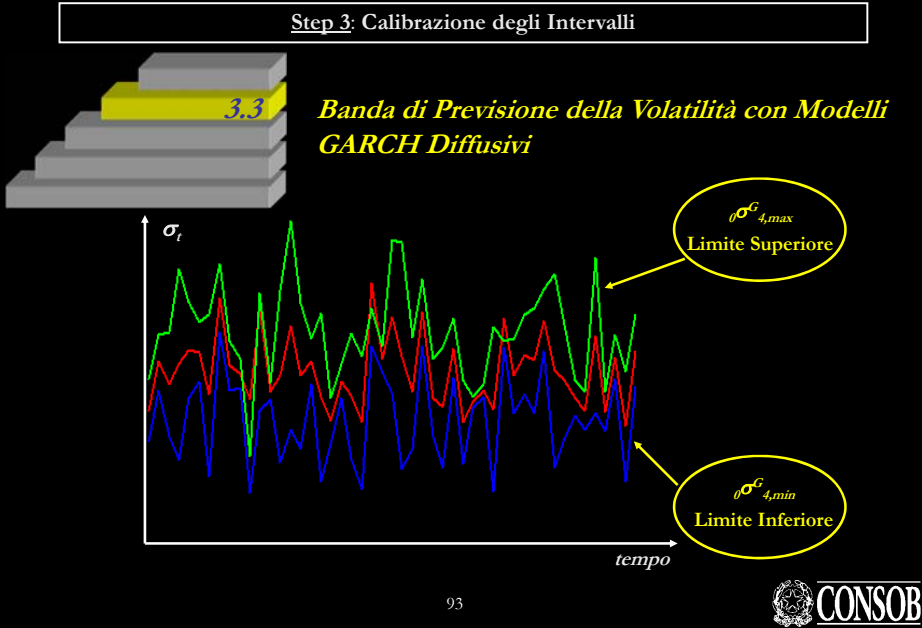
Step 3: Calibrazione degli Intervalli



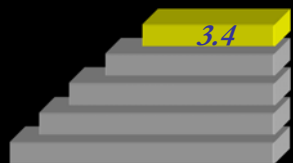
Banda di Previsione della Volatilità con Modelli GARCH Diffusivi



92



Step 3: Calibrazione degli Intervalli



Validazione dell'Intervallo di Volatilità Iniziale
Numero di osservazioni esterne alla Banda in un anno

$$\Delta = \frac{[\text{Tot.} > \sigma_{4,max}^G] + [\text{Tot.} < \sigma_{4,min}^G]}{n*250}$$

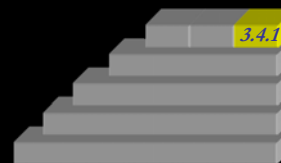
$$\Delta_{up} = \frac{[\text{Tot.} > \sigma_{4,max}^G]}{n*250}$$

$$\Delta_{down} = \frac{[\text{Tot.} < \sigma_{4,min}^G]}{n*250}$$

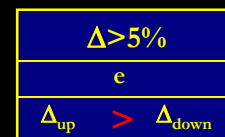
97



Step 3: Calibrazione degli Intervalli



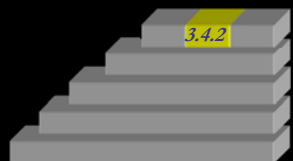
Aggiornamento dell'Intervallo di Volatilità iniziale
Iterazione della Procedura



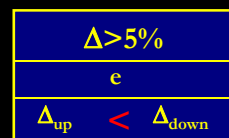
98



Step 3: Calibrazione degli Intervalli



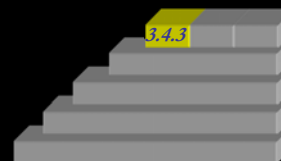
Aggiornamento dell'Intervallo di Volatilità iniziale
Iterazione della Procedura



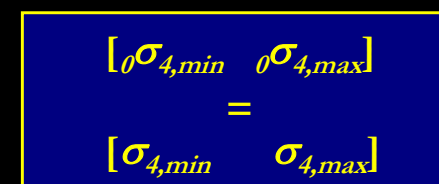
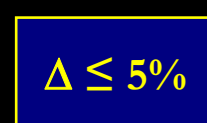
99



Step 3: Calibrazione degli Intervalli

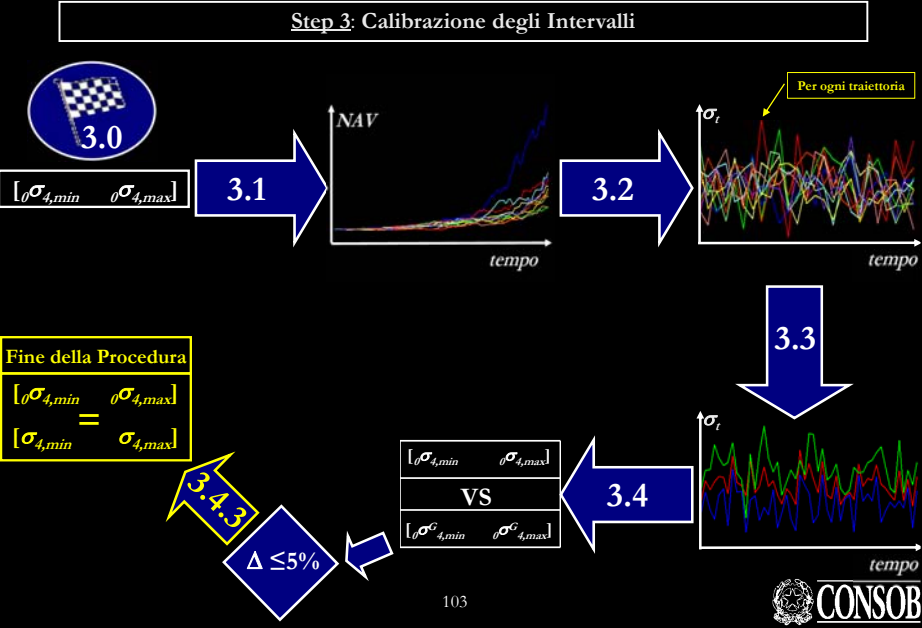
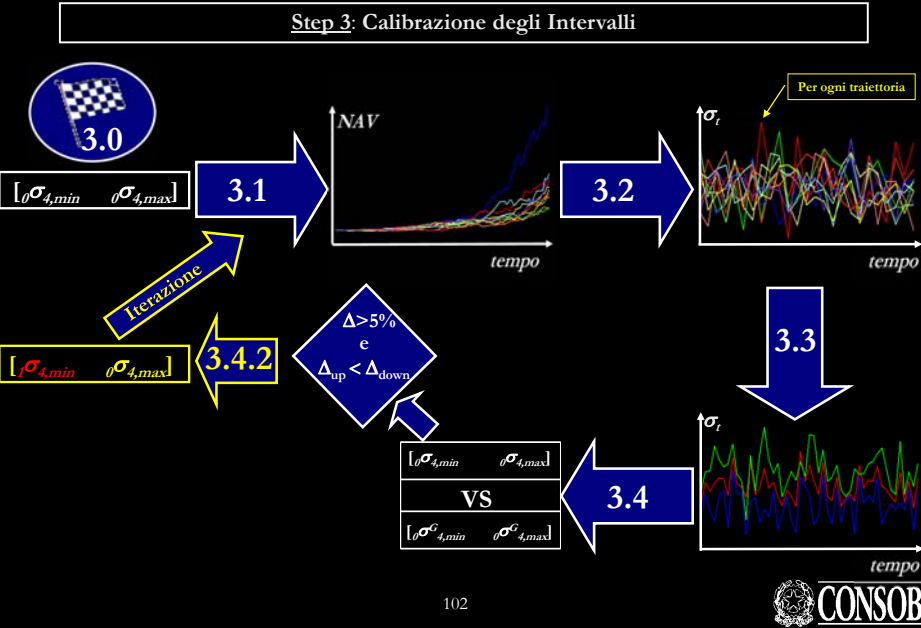
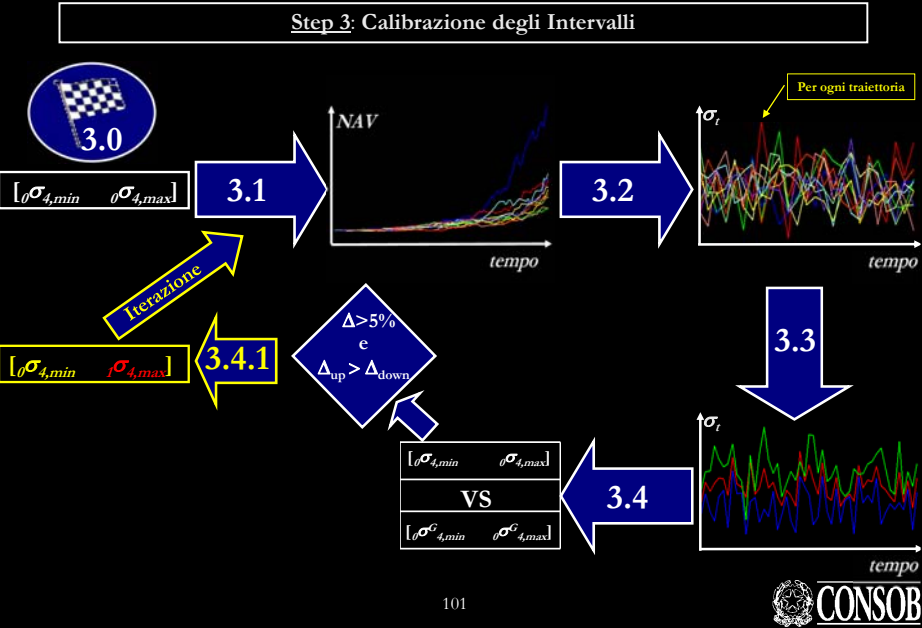


Fine della Procedura



100





Step 3: Calibrazione degli Intervalli

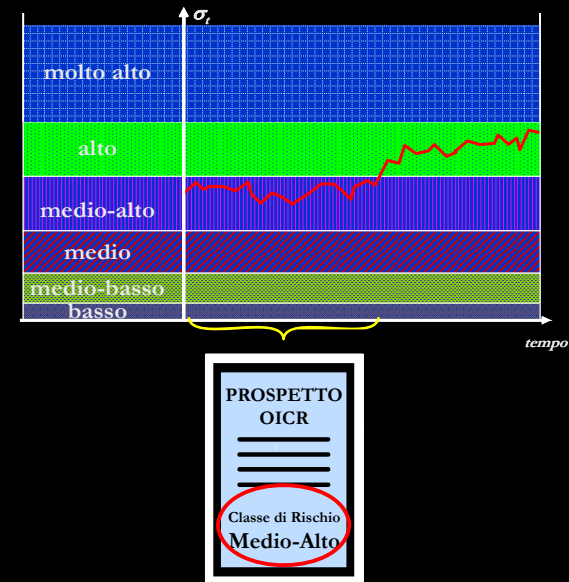
OUTPUT

Classi di Rischio	Intervalli di Volatilità	
	σ_{min}	σ_{max}
basso	0,01%	0,49%
medio-basso	0,50%	1,99%
medio	2,00%	3,99%
medio-alto	4,00%	9,99%
alto	10,00%	24,99%
molto alto	25,00%	sopra 25,00%

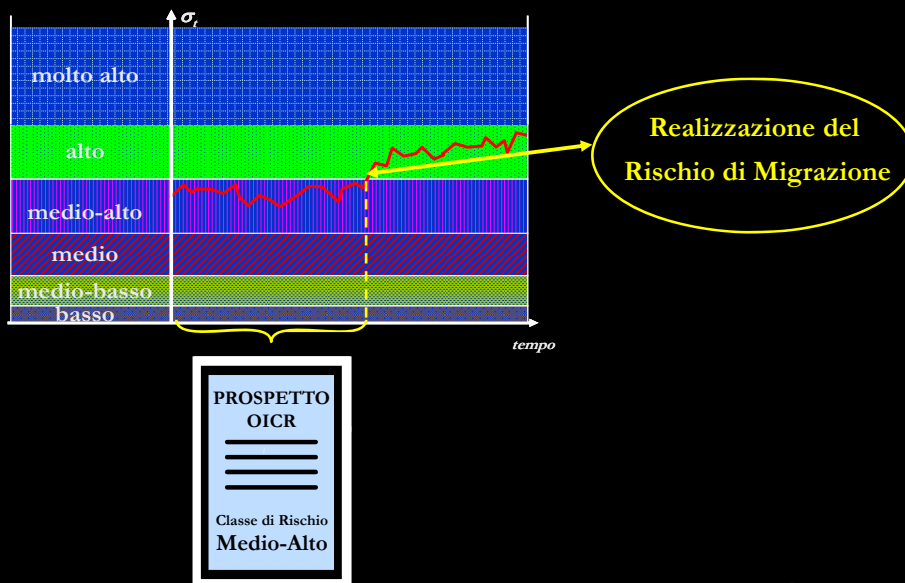
• **Garch Diffusivi vs Misure di Rischio per i Fondi Flessibili**

- Concetti Preliminari sui Rischi nei Fondi
- Elementi Definitivi sui Fondi Flessibili
- La Regolamentazione di Trasparenza in Italia
- Misure di Rischio basate sulla Volatilità
- **Realizzazione del Rischio e Regolamentazione di Trasparenza**
- Analisi Empirica
 - Descrizione della Metodologia
 - Risultati

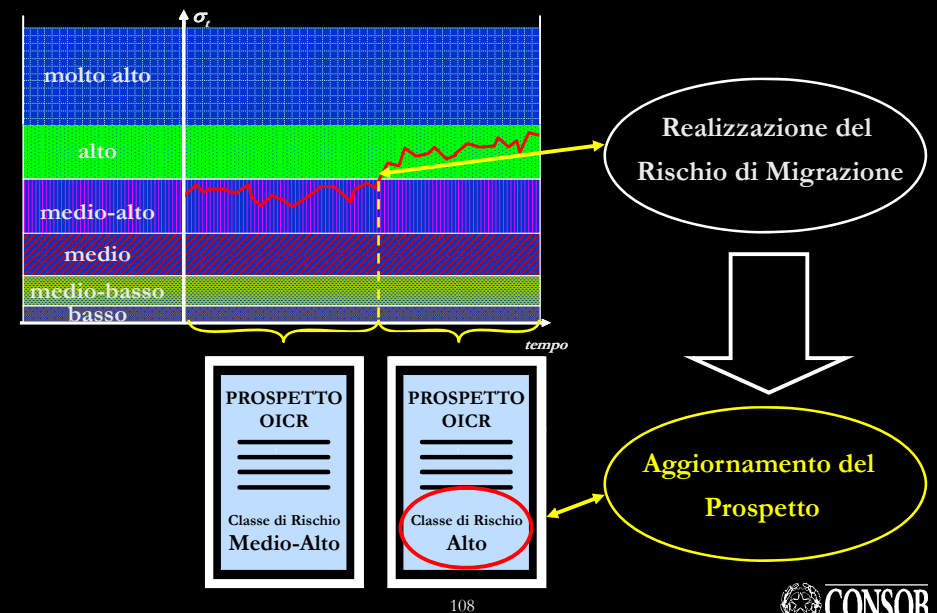
105



106



107



108

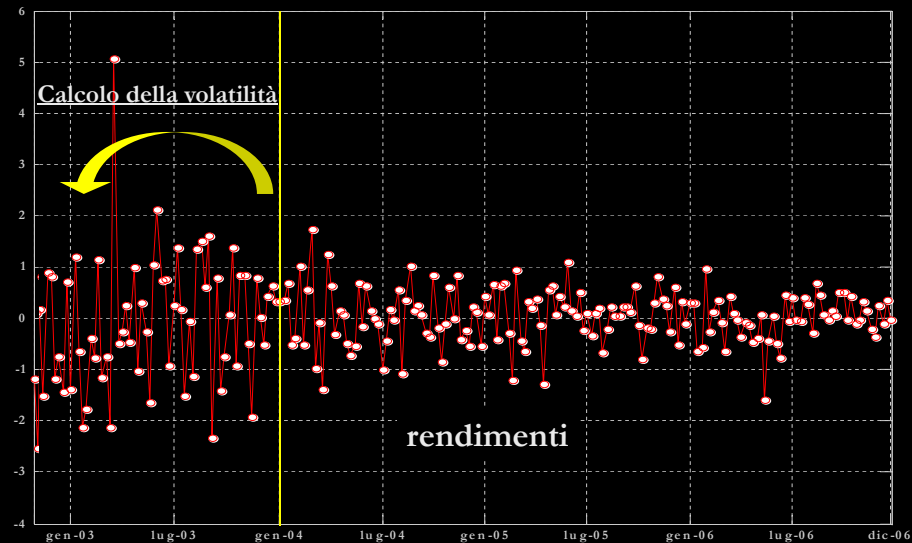
• **Garch Diffusivi vs Misure di Rischio per i Fondi Flessibili**

- Concetti Preliminari sui Rischi nei Fondi
- Elementi Definitivi sui Fondi Flessibili
- La Regolamentazione di Trasparenza in Italia
- Misure di Rischio basate sulla Volatilità
- Realizzazione del Rischio e Regolamentazione di Trasparenza
- **Analisi Empirica**
 - **Descrizione della Metodologia**
 - Risultati

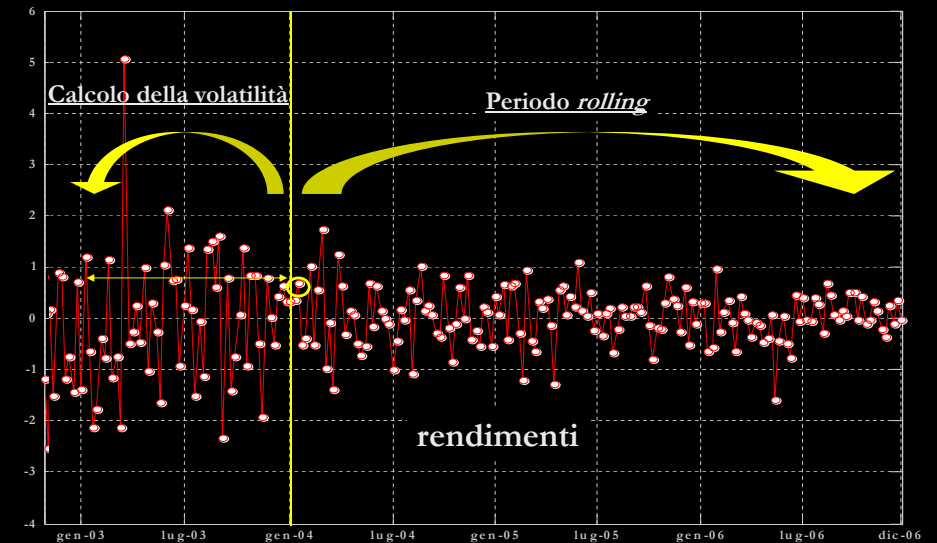
109



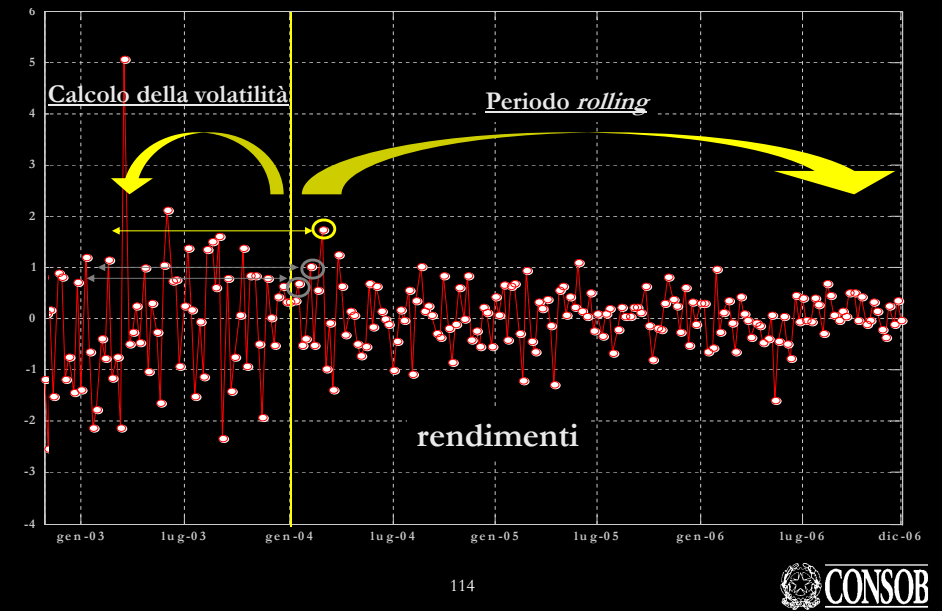
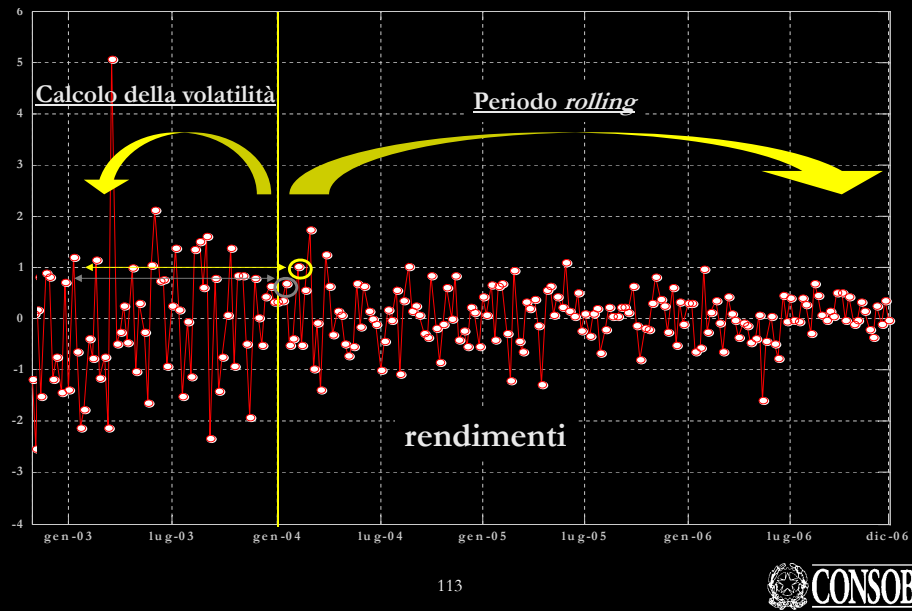
110



111



112



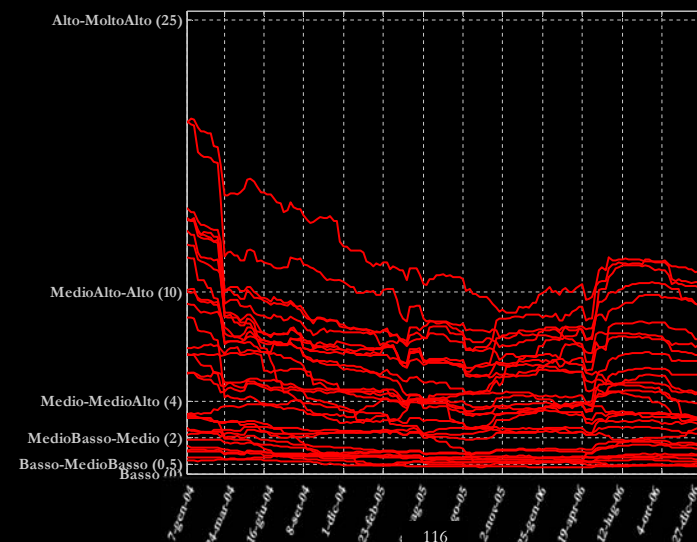
Indice

• Garch Diffusivi vs Misure di Rischio per i Fondi Flessibili

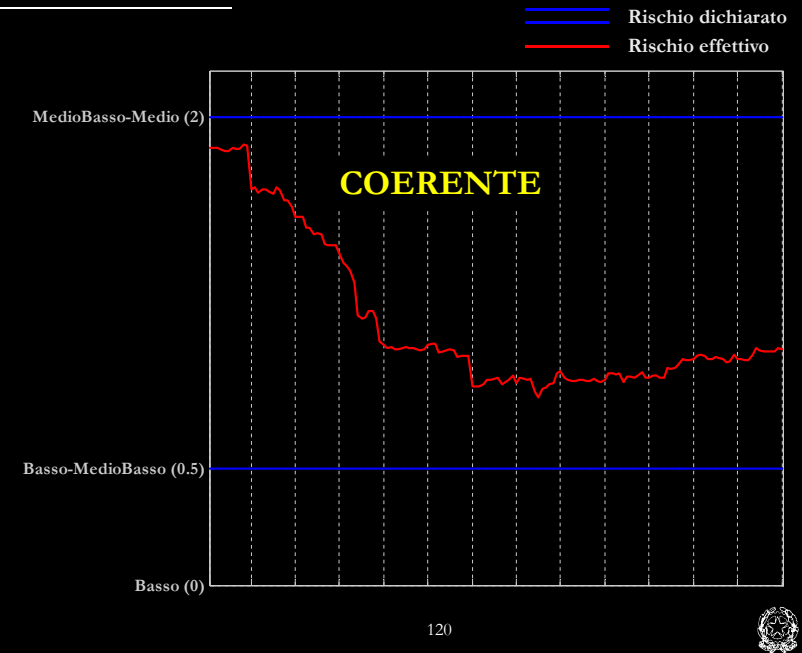
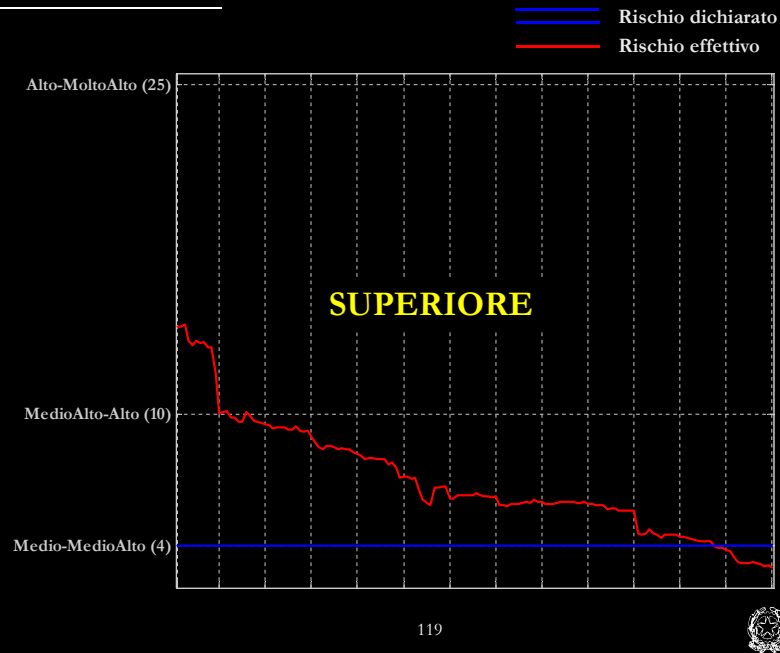
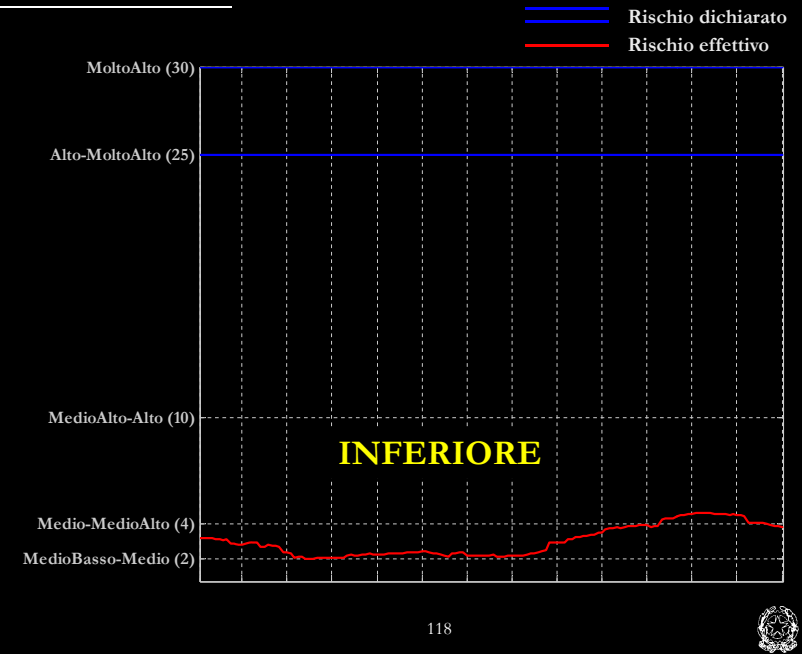
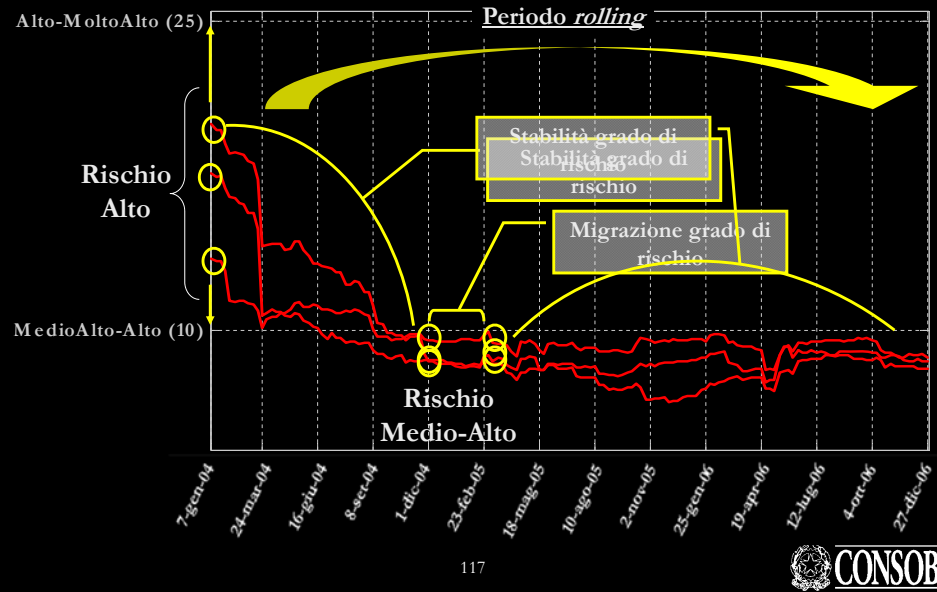
- Concetti Preliminari sui Rischi nei Fondi
- Elementi Definitivi sui Fondi Flessibili
- La Regolamentazione di Trasparenza in Italia
- Misure di Rischio basate sulla Volatilità
- Realizzazione del Rischio e Regolamentazione di Trasparenza
- **Analisi Empirica**
 - Descrizione della Metodologia
 - **Risultati**

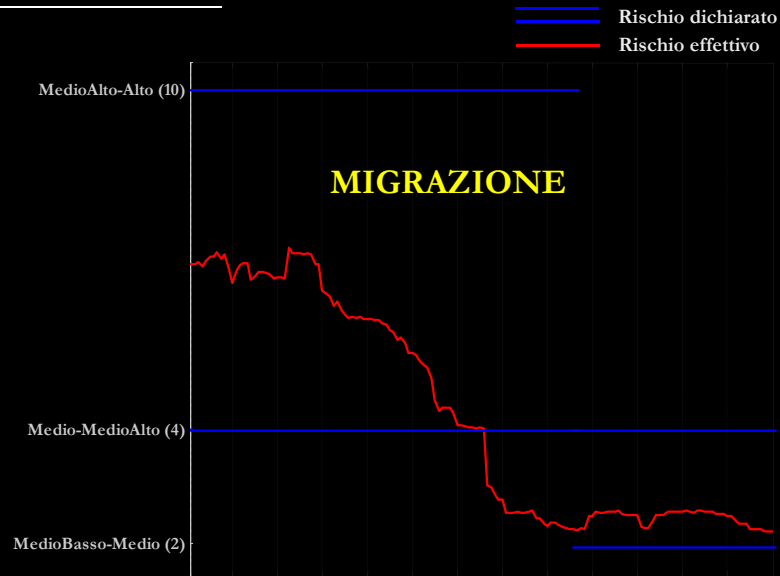
Analisi empirica: **Risultati**

Plot delle Serie Storiche della Volatilità di 31 Fondi Flessibili Italiani

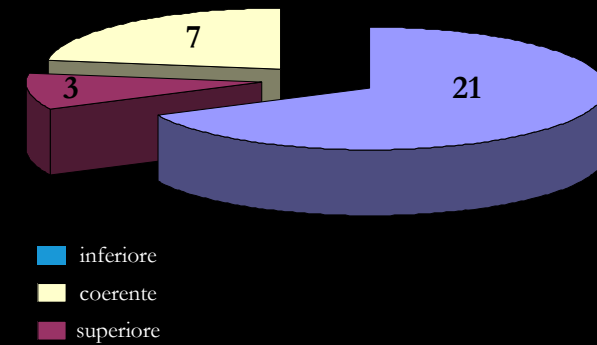


Serie storica della volatilità





121



122

Conclusioni

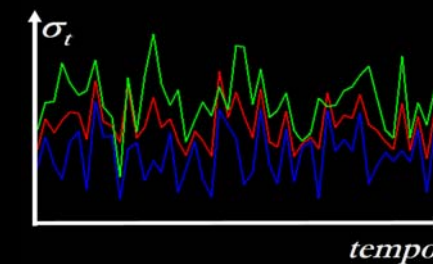
1. La Volatilità è una misura di rischio fondamentale in finanza:
 - ampia gamma di applicazioni
 - variabile indipendente di ogni altra misura di rischio
2. La Volatilità varia in modo casuale nel tempo, identificando un Processo Stocastico
3. Il Processo Stocastico della Volatilità è tipicamente analizzato con Modelli Garch
4. Il Limite Diffusivo dei Modelli Garch secondo il Teorema della Convergenza consente di definire intervalli di previsione attendibili per i valori futuri della Volatilità.
5. **I Garch Diffusivi possono essere utilmente impiegati per la definizione di robuste ed efficaci Misure di Rischio basate sulla Volatilità per i Fondi Flessibili ...**

123

Conclusioni

... INFATTI

Attraverso Modelli Garch Diffusivi si costruisce la Banda di Previsione della Volatilità:



determinando Intervalli di Volatilità quali “Sottostante” Quantitativo alle *Classi di Rischio Qualitative* individuate dalla Regolamentazione di Trasparenza

124



Previsioni della Volatilità nei mercati finanziari attraverso approcci Garch Diffusivi