# Intervalli di Stabilità Parametrica per una Calibrazione Operativa del modello di Heston

*Extended Abstract*

Il lavoro si preoccupa di effettuare un'estesa esplorazione numerica del modello di valutazione del prezzo delle opzioni a volatilità stocastica di HESTON, per ottenere una migliore conoscenza della stabilità dei parametri del modello e delle interrelazioni tra essi, ma soprattutto un'efficace cognizione dell'effettivo spazio parametrico entro il quale calibrare concretamente il modello. La finalità complessiva è pertanto quella di potersi avvicinare al delicato problema della calibrazione del modello di HESTON con maggiore consapevolezza sull'ammissibilità di determinati parametri in termini di stabilità numerica e senso finanziario, e sulla complessità insita nelle relazioni in gioco.

Stabilità numerica della formula di Heston per derivati plain vanilla

La formula di Heston per il calcolo del prezzo di un derivato plain vanilla (CALL o PUT), nella forma classica Black – Scholes, con la variabile $\Psi$ binaria che può assumere il valore 1 nel caso di una CALL e – 1 nel caso di una PUT e $\Theta$ rappresentazione sintetica dello spazio dei parametri, è data da:

(1.1) $$V(S,v,t) = \Psi \cdot \left(SP_1(\Psi,\Theta) - Ke^{-r\tau}P_2(\Psi,\Theta)\right)$$

e prevede, nella determinazione delle due probabilità $P_1(\Psi,\Theta), P_2(\Psi,\Theta)$:

(1.2) $$P_j(\Psi,x,v,T;\ln[K]) = \frac{1-\Psi}{2} \cdot \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-i\phi\ln[K]}\tilde{f}_j(x,v,T;\phi)}{i\phi}\right]d\phi\right)$$

il calcolo di una trasformata di Fourier che, com'è noto, tende ad "esplodere" e dunque presenta seri problemi di stabilità numerica al variare dei parametri. La formula, riespressa in funzione di tutti i parametri in gioco assume la forma:

(1.3) $$C_H = C_H\left(S, X, \tau, r, v(t), \lambda^*, \rho_{1,2}, \kappa, \theta, \sigma\right)$$

dove $S$ è il valore corrente del sottostante, $X$ è il prezzo Strike dello stesso, $r$ è il valore corrente del tasso d'interesse, $\tau$ è la vita residua, $v_t$ il livello corrente della varianza, $\lambda^*(v,t)=\lambda v_t, \lambda \in R$ è il premio per il rischio di volatilità, $\rho_{1,2}$ il coefficiente di correlazione tra i due moti browniani $z_1(t), z_2(t)$, mentre $\kappa, \theta, \sigma$ sono i parametri che regolano il processo di varianza, rispettivamente la "speed of mean reversion", la "long run mean" e la "vol of vol".

La formula è stata testata a fondo su MATLAB in quanto risultavano agevolmente gestibili due differenti algoritmi per il calcolo della trasformata di Fourier, l'algoritmo di quadratura standard dell'Optimization ToolBox, (QUAD8), ed una routine NAG (Numerical Algorithm Groups) in grado di risolvere il calcolo di integrali instabili dal punto di vista numerico. Il confronto dei risultati delle due routine è stato infatti ritenuto, a seguito dell'esame di approcci numerici alternativi, un'efficiente variabile proxy dell'instabilità della formula. Pertanto l'esplorazione numerica ha previsto l'analisi dettagliata di una rilevante sezione dello spazio parametrico a intervalli discreti, utilizzando griglie di variazione particolarmente ampie, per testare la capacità degli algoritmi di fornire prezzi significativi dal punto di vista finanziario e coerenti tra loro. Questo doppio controllo ha permesso di definire in maniera accurata degli "intervalli di stabilità" (Stability Surfaces) all'interno dei quali i parametri non fanno esplodere la trasformata di Fourier, e che risultano utili per ridurre il campo di variazione dei parametri durante il processo di calibrazione del modello.

I risultati forniscono informazioni di rilievo: $\lambda$, o premio per il rischio di volatilità, appare la fonte principale di instabilità numerica del modello. Valori di $\lambda \leq -1$ non consentono di ottenere prezzi significativi sulla quasi totalità dello spazio parametrico ed inducono al rifiuto di qualsiasi calibrazione. Nel seguito tale "soglia di esplosione" viene definita $\overline{\lambda}$. Questa constatazione mette in discussione numerosi studi sulla calibrazione del modello di Heston presenti in letteratura che ammettono la possibilità di un $\lambda$ significativamente negativo (v. Ref.) Altro parametro fonte di instabilità appare essere chiaramente $\tau$: all'aumentare della vita residua fino a livelli elevati per strumenti finanziari derivati (5 anni), il numero dei prezzi non significativi aumenta proporzionalmente (in maniera più evidente nel caso delle PUT che delle CALL) rispetto a tutto lo spazio parametrico, anche se le statistiche elaborate, insieme alla visualizzazione delle "Stability Surfaces", non consentono di derivare una "esplosione" della stabilità della formula. Il risultato appare rilevante anche in considerazione del fatto che modelli a volatilità stocastica sono stati sviluppati in letteratura proprio per derivare forme trattabili per il pricing di contingent claim aventi durata finanziaria superiore all'anno $(\tau \geq 1)$. Terzo parametro di notevole interesse dal punto di vista numerico è $\sigma$: valori elevati $(\sigma \geq 0.4)$ producono prezzi non significativi, ma fenomeni rilevanti di instabilità si producono anche per livelli prossimi a 0 di $\sigma$. Anche tale circostanza appare degna di interesse, in quanto verosimilmente riduce l'insieme di sottostanti ammissibili per procedere al pricing alla Heston di derivati plain vanilla.

La sovrapposizione di questi intervalli di instabilità porta al contemporaneo intensificarsi della stessa, fino ad individuare delle vere e proprie regioni parametriche in cui i risultati della formula di Heston cessano di avere significato. Al riguardo sembra importante evidenziare che verosimilmente gli effetti congiunti di limitazione parametrica testé illustrati possano avere determinato gli erronei risultati di calibrazione riportati in letteratura.

Per i parametri rimanenti, non si può parlare di vere e proprie "regioni critiche", ma in genere si rileva la produzione di prezzi occasionalmente non significativi per valori estremi degli stessi. Più $\lambda$ è vicino a $\overline{\lambda}$, più gli algoritmi sembrano tollerare meno valori estremi dei restanti parametri. Le "Stability Surfaces" permettono la visualizzazione sintetica di questo tipo di interrelazioni, candidandosi come utile strumento di orientamento dal punto di vista operativo e di interpretazione finanziaria dei parametri stessi.
Esaminate queste relazioni che verosimilmente riducono le tipologie di sottostanti per le quali è possibile calcolare il prezzo Heston del derivato, sono state analizzate le relazioni di dipendenza tra le variabili del modello, anche perché in letteratura solo alcuni dei parametri aggiuntivi del modello di Heston, rispetto allo standard Black – Scholes, hanno un effetto studiato ed univocamente determinato sul prezzo del derivato: il livello di correlazione tra i due moti browniani influenza il grado di asimmetria della distribuzione di probabilità del sottostante ed il livello di volatilità del processo di varianza, la curtosi della distribuzione [HE93]. Meno note sono le relazioni del prezzo con la "long run mean" $\theta$, la "speed of mean reversion" $\kappa$, e soprattutto il premio per il rischio di volatilità $\lambda^*$. La questione ancora aperta in letteratura sul reale significato finanziario e sulla possibilità di stima operativa di questo parametro, insieme ad i risultati ottenuti, che ne rimarcano l'instabilità numerica, inducono ad analizzare la relazione che lega $\lambda$ al prezzo ed agli altri parametri, valutando con attenzione la complessità sottesa all'ipotesi di un premio per il rischio di volatilità $\lambda^*$ proporzionale al livello di volatilità $v_t$.

Il primo risultato che appare evidente, costante ad un'esplorazione numerica sullo spazio dei parametri, è la relazione negativa che lega i prezzi di un derivato plain vanilla a $\lambda$: al crescere di $\lambda$, i prezzi tendono a decrescere indipendentemente dai valori assunti dagli altri parametri. Questo risultato è coerente con il concetto di premio per il rischio di volatilità: al crescere di $\lambda$, l'investitore accetta, a parità di altre condizioni, di assumere un rischio maggiore o uguale a quello già sostenuto per via della non prevedibilità della volatilità, solo ad un costo progressivamente minore.
Altro fenomeno generale ed immediatamente percepibile è quello per cui la riduzione del prezzo al crescere di $\lambda$ ha un carattere **esponenziale**; di conseguenza $\lambda$ elevati incidono sempre meno sul prezzo del derivato (la figura rappresentativa di questa relazione in uno spazio $(\lambda, V)$ è un'iperbole). Questo andamento segue l'assunzione di proporzionalità tra volatilità e premio per il rischio ed è coerente con le previsioni teoriche.
Se si studiano le relazioni tra i parametri del modello ed il prezzo (le cd *greche*) e come variano le greche al variare di $\lambda$, l'evidenza empirica mostra come $\lambda$ non abbia affatto un'influenza neutra sulle stesse. Dato che le greche del modello di Heston sono espresse, al pari della formula risolutiva, in forma "semichiusa", è impossibile ricondurre tale fenomeno ad una precisa relazione analitica ed è necessario valutare numericamente le dipendenze. In maniera interessante, in analogia con i problemi di stabilità numerica, complesse interrelazioni tra $\lambda$ e gli altri parametri diventano più evidenti intorno ai valori estremi degli stessi e si intensificano se i parametri interrelati sono a loro volta fonte di instabilità numerica: in maniera esplicita $\tau$ svolge un ruolo attivo ed esteso del determinare l'andamento della direzione e l'intensità delle greche. Altre variabili causa degli andamenti complessi delle greche sono il valore iniziale della varianza $v$, insieme alla moneyness $S/K$.

In sintesi, il premio per il rischio di volatilità $\lambda$ sembra essere la causa diretta delle inversioni del segno della relazione tra *V* e la "speed of mean reversion" $\kappa$, e tra *V* e la

“vol of vol” $\sigma$, congiuntamente all’effetto dei parametri $\{\tau, v\}$. Un $\lambda$ vicino alla soglia di esplosione $\overline{\lambda}$ tende ad accrescere l’impatto del parametro sul prezzo del derivato; $\{\tau, v\}$ crescenti invece tendono a ridurre il valore della generica greca; un’eccezione coerente con l’intuizione si ha per $\sigma$, dato che in questo caso un aumento di $v$ accresce l’impatto, peraltro modesto, di $\sigma$ sul valore del derivato.
Variazioni della moneyness del contingent claim influenzano in maniera netta le greche rispetto ad alcuni parametri, mentre non alterano la struttura di interrelazioni di altri. Molto sensibili a variazioni del parametro $S/K$ risultano le greche rispetto ai parametri $\rho, \sigma, r$. I parametri $\tau, \kappa, \theta$ sono invece scarsamente influenzati da movimenti della moneyness, tanto da farne ritenere l’impatto sulla struttura di interrelazioni trascurabile.
Per quanto precede, la calibrazione di un modello complesso e con 7 parametri come quello di Heston risulta problematica dal punto di vista tecnico e dal significato controverso, stante la scarsa significatività finanziaria dei valori assunti dai parametri al termine della procedura. Gli Autori ritengono l’analisi del comportamento computazionale del modello e la piena comprensione delle relazioni intercorrenti tra i vari parametri, un passo indispensabile verso l’applicazione operativa dello stesso. Il presente lavoro cerca di far luce su parte della complessità nascosta nel modello a volatilità stocastica di Heston, di modo da identificare dei limiti di variabilità dei parametri tale da rendere il processo di programmazione non lineare funzionale alla calibrazione del modello più realistico; esso è suscettibile di ampliamento nella dimensione dell’esplorazione numerica e nel numero di relazioni analizzate e presenta un approccio metodologico che si spera possa essere applicato nella calibrazione, al fine di favorire una vera applicazione operativa del modello.

Referenze:

[LL93] Lamourex C. G. & W.D.Lastrapes, 1993 “Forecasting Stock – Return Variance: Toward an understanding of Stochastic Implied Volatilities” *Review of Financial Studies*, 6, 293 – 326.

[HE93] S.Heston, 1993 “A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options” *Review of Financial Studies*, 6, 327 – 343.

[MO99] M.Morini, 1999 “Pricing and Hedging di Opzioni su Indici Azionari in un contesto di Volatilità Stocastica persistente” *Tesi di Dottorato* – Università degli Studi di Bergamo

[RT96] E.Renault & N.Touzi, 1996 “Option Hedging and Implied Volatilities in a Stochastic Volatility Model” *Mathematical Finance*, 6, 279 – 302.

[SCO87] L. Scott, 1987 “Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an application” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 143 – 151.

[SCO96] L. Scott, 1996 “Pricing Stock Options in a Jump Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Application of Fourier Inversion Method” *Mathematical Finance*.

[SS91] E.M.Stein & J.C.Stein, 1991 “Stock price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach” *Review of Financial Studies*, 4, 727 – 752.