Intervalli di Stabilità Parametrica per una Calibrazione Operativa del Modello di Heston

Modello a Volatilità Stocastica di Heston (1993)

$$
(1) \quad
\begin{aligned}
dS(t) &= \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dz_1(t) \\
dv(t) &= \left[\delta^2 - 2\beta v(t)\right]dt + 2\delta\sqrt{v(t)}dz_2(t)
\end{aligned}
$$

Formula (Semi)Chiusa per la Valutazione di un Contigent Claim (Heston 1993)

$$
(2) \qquad V(S, v, t) = \Psi \cdot \left(SP_1(\Psi, \Theta) - Ke^{-r\tau}P_2(\Psi, \Theta)\right)
$$

con $$P_j(x,v,\tau;\ln[K]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-i\phi\ln[K]}\tilde{f}_j(x,v,\tau;\phi)}{i\phi}\right]d\phi$$

Trasformata di Fourier

- Problemi di Stabilità Numerica della formula
- Esplosione dell'Integrale calcolato in forma numerica
- Limitata applicabilità degli algoritmi di quadratura su sezioni ben definite dello spazio dei parametri

Proprietà Importante (Heston 1993)

Irrilevanza del Premio per il Rischio di Volatilità

Sotto l'ipotesi: $\lambda^*\left(S, v, t\right) = \tilde{\lambda} v(t)$

Premio per il rischio di volatilità **proporzionale** al livello di volatilità stesso

$\Downarrow$ (3)

$$C_H\left(S, X, \tau, r, v(t), \lambda^*, \rho_{1,2}, \kappa, \theta, \sigma\right) = C_H\left(S, X, \tau, r, v(t), 0, \rho_{1,2}, \kappa, \frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\theta, \sigma\right)$$

Problema di Calibrazione Classico
Metodo SSE (Sum of Squared Pricing Errors)

$$SSE(t) = \min_{v(t),\Phi} \sum_{n=1}^{N} \left[C_{MERCATO}\left(X_n, \tau_n, r, S\right) - C_{HESTON}\left(X_n, \tau_n, r, S\right) \right]^2$$

con $\quad \Phi = \Phi\left(\lambda^*, k, \theta, \sigma, \rho_{1,2}\right)$

<u>Problema di Ottimizzazione Non Lineare a 6 Parametri</u>

Principali problemi derivanti da un implementazione effettiva su **MATLAB** di una calibrazione **SSE**

- Difficoltà computazionali elevate (l’algoritmo non chiude con successo l’ottimizzazione, o non lo fa in tempi ragionevoli)
- Alta probabilità per l’algoritmo di ottimizzazione di imbattersi in un minimo locale
- Non sense finanziario per i valori calibrati dei parametri

Rimedi operativi classici in un problema di calibrazione **SSE**

- Imporre dei bound (impliciti) alla regione parametrica in cui l'algoritmo effettua la ricerca del minimo
- Ridurre la complessità computazionale del problema (l'ottimizzazione congiunta di tutti i parametri)

Esprimere la formula di riferimento con un numero ridotto di parametri

Stimare alcuni dei parametri per via econometrica e considerarli nel problema di calibrazione come costanti

La proprietà (3) consente di applicare queste tecniche al modello di Heston per semplificare la calibrazione

2 metodologie

"Calibrativa Pura"

- Porre lambda = 0 e stimare i 5 restanti parametri considerandoli "volatility risk adjusted" secondo la proprietà (3).

"Calibrativa Ibrida"

- Stimare per via econometrica il premio per il rischio di volatilità e considerarlo come costante nella calibrazione

Le 2 metodologie presentano entrambe rischi concreti legati all’intrinseca natura di lambda

- Come definire una stima realistica del premio per il rischio di volatilità?

- I parametri “volatility risk adjusted” che vengono fuori dalla calibrazione non eliminano il problema legato al premio per il rischio di volatilità, perché forniscono una stima implicita del parametro lambda, supponendo di avere una *buona stima* econometrica dei parametri che governano il processo di volatilità originario:

$$\lambda = \frac{\kappa\theta}{\theta^{*}} - \kappa$$

<u>Supponendo una efficace “calibrazione ridotta” questa stima non dovrebbe causare problemi di stabilità numerica inserita all’interno della formula (2)</u>

⇓ ⇓

- Ecco un principio valutativo semplice ed efficace per valutare la “bontà” di una calibrazione

Anticipatamente, è possibile stabilire quali regioni dello spazio parametrico del modello di Heston sono compatibili con il problema della stabilità numerica

- Qualsiasi calibrazione che fornisse parametri situati al di fuori di dell'"area di stabilità" sarebbe da rifiutare come inconsistente

- E' possibile acquisire più informazione sul comportamento del premio per il rischio di volatilità all'interno del modello

Analisi di Stabilità Numerica

2 Routine di Quadratura della Trasformata di Fourier

Quad8 - Optimization Toolbox (Standard)

D01ajf – NAG Toolbox

La routine NAG è in grado di gestire un numero finito di punti di singolarità

Criterio di valutazione della stabilità numerica della Trasformata di Fourier

- Se per una particolare combinazione di parametri

$$\left(\overline{S}, \overline{X}, \overline{\tau}, \overline{r}, \overline{v}(t), \overline{\lambda}^{*}, \overline{\rho}_{1,2}, \overline{\kappa}, \overline{\theta}, \overline{\sigma}\right)$$

$$\left| C_H\left[QUAD8\right] - C_H\left[NAG\right]\right| \geq 0.01$$

Tale combinazione è considerata fonte di instabilità numerica tale da produrre prezzi inattendibili

Regione Parametrica Osservata

$$\Theta = \Theta\left(\overline{S}\big/\overline{K}, \overline{\tau}, \overline{r}, \overline{v}(t), \overline{\lambda}^{*}, \overline{\rho}_{1,2}, \overline{\kappa}, \overline{\theta}, \overline{\sigma}\right) \subset \Re^{9}$$

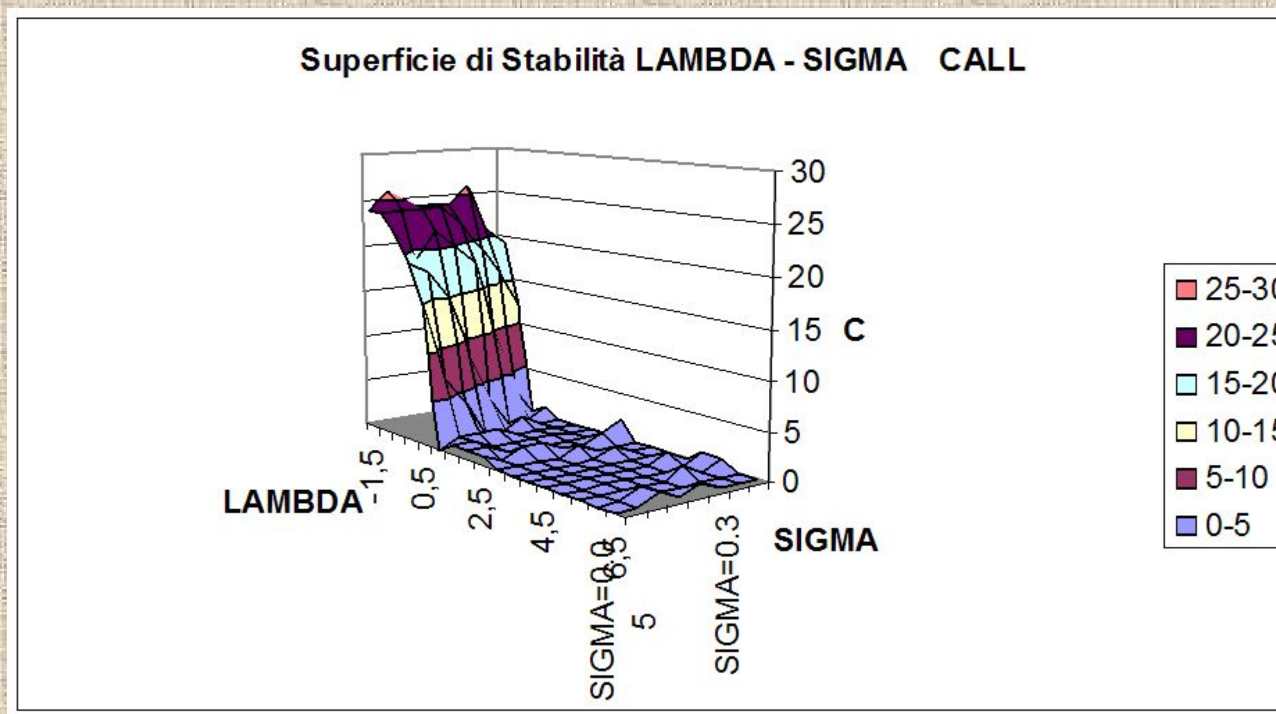
Parametri	Intervallo di Campionamento	Passo di Campionamento
λ	$-4 \leq \lambda \leq 6.5$	0.5
$\rho_{1,2}$	$-1 \leq \rho_{1,2} \leq 1$	0.3
v	$0 \leq v \leq 0.75$	0.1
σ	$0 \leq \sigma \leq 0.5$	0.1
κ	$0 \leq \kappa \leq 2$	0.15
θ	$0 \leq \theta \leq 0.95$	0.15
r	$0 \leq r \leq 0.3$	0.5
S/K	$0.6 \leq S/K \leq 1.4$	0.15
τ	$1 \leq \tau \leq 5$	0.5

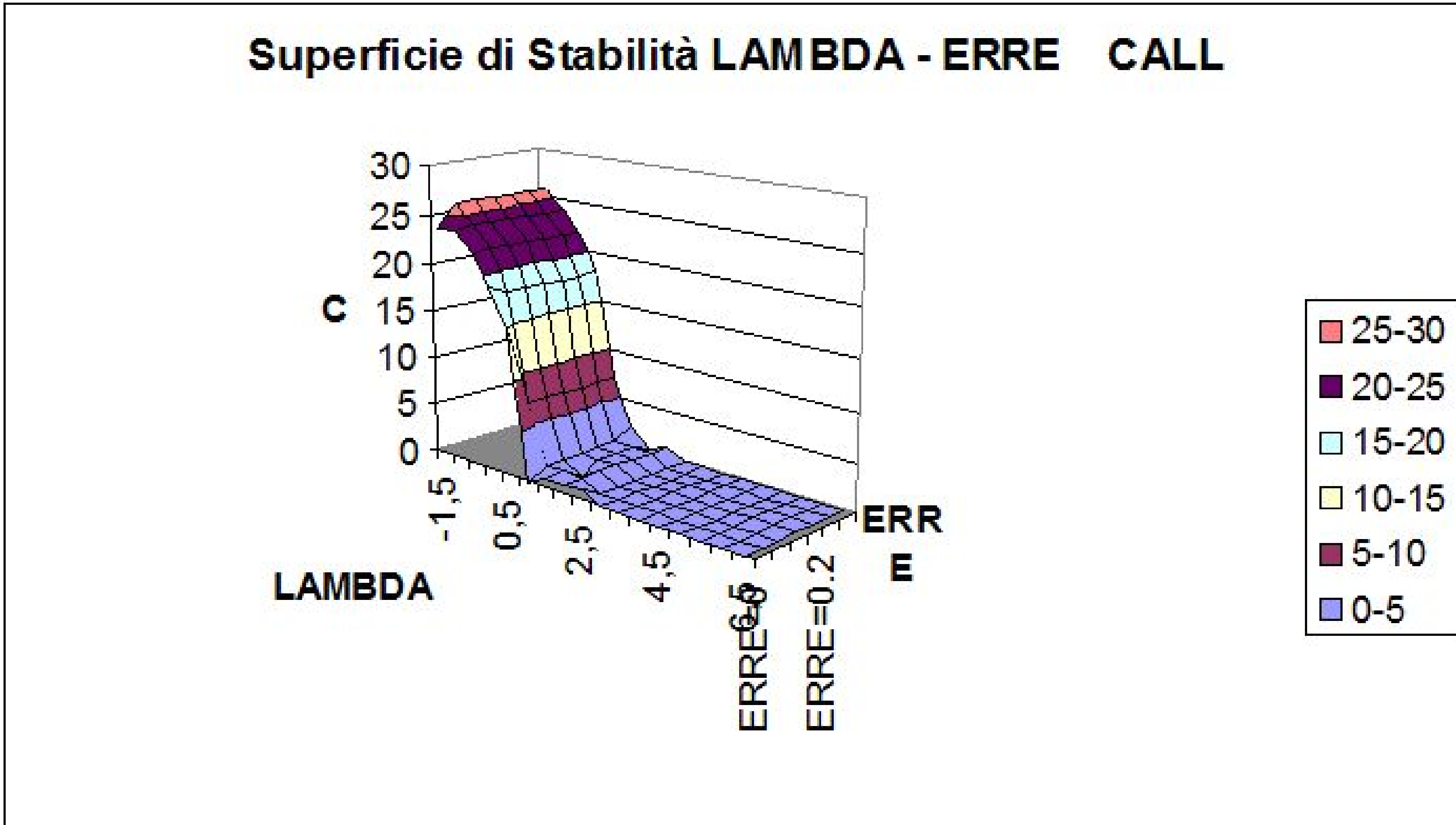
Risultati Principali

- λ è la principale fonte di instabilità numerica;
- Per ogni combinazione parametrica esiste un "valore di soglia" di λ al di sotto del quale le routine utilizzate non forniscono prezzi Significativi. E' possibile definire tale valore come "*soglia di esplosione*" della formula;
- Valori estremi dei parametri τ, σ sono ulteriori fonti di instabilità, anche se non comportano l'esplosione della formula;
- Gli effetti di instabilità dei parametri in questione tendono a sommarsi, evidenziando delle vere e proprie "regioni" di inammissibilità parametrica in cui le routine non riescono a computare

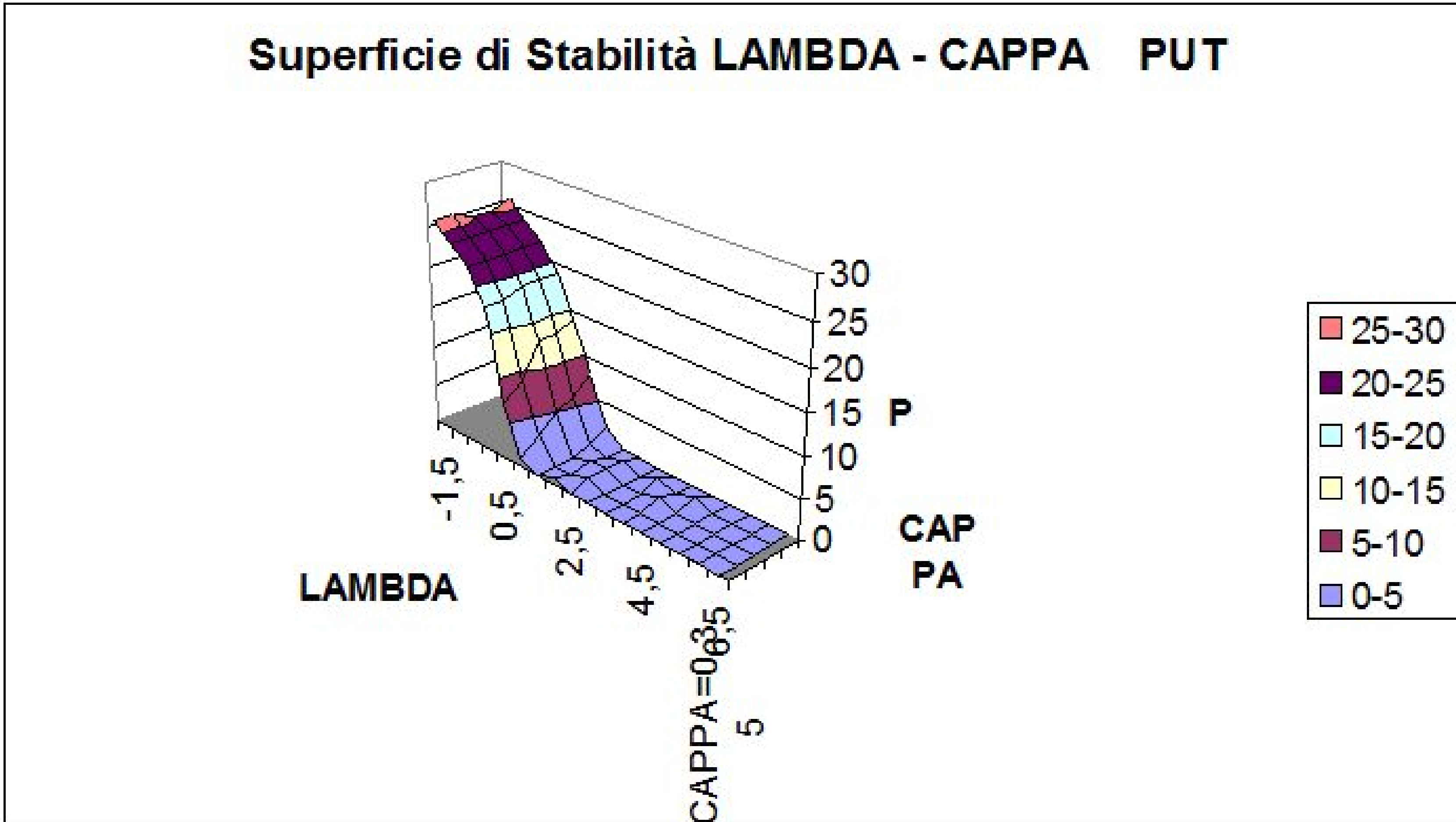
Stability Surfaces

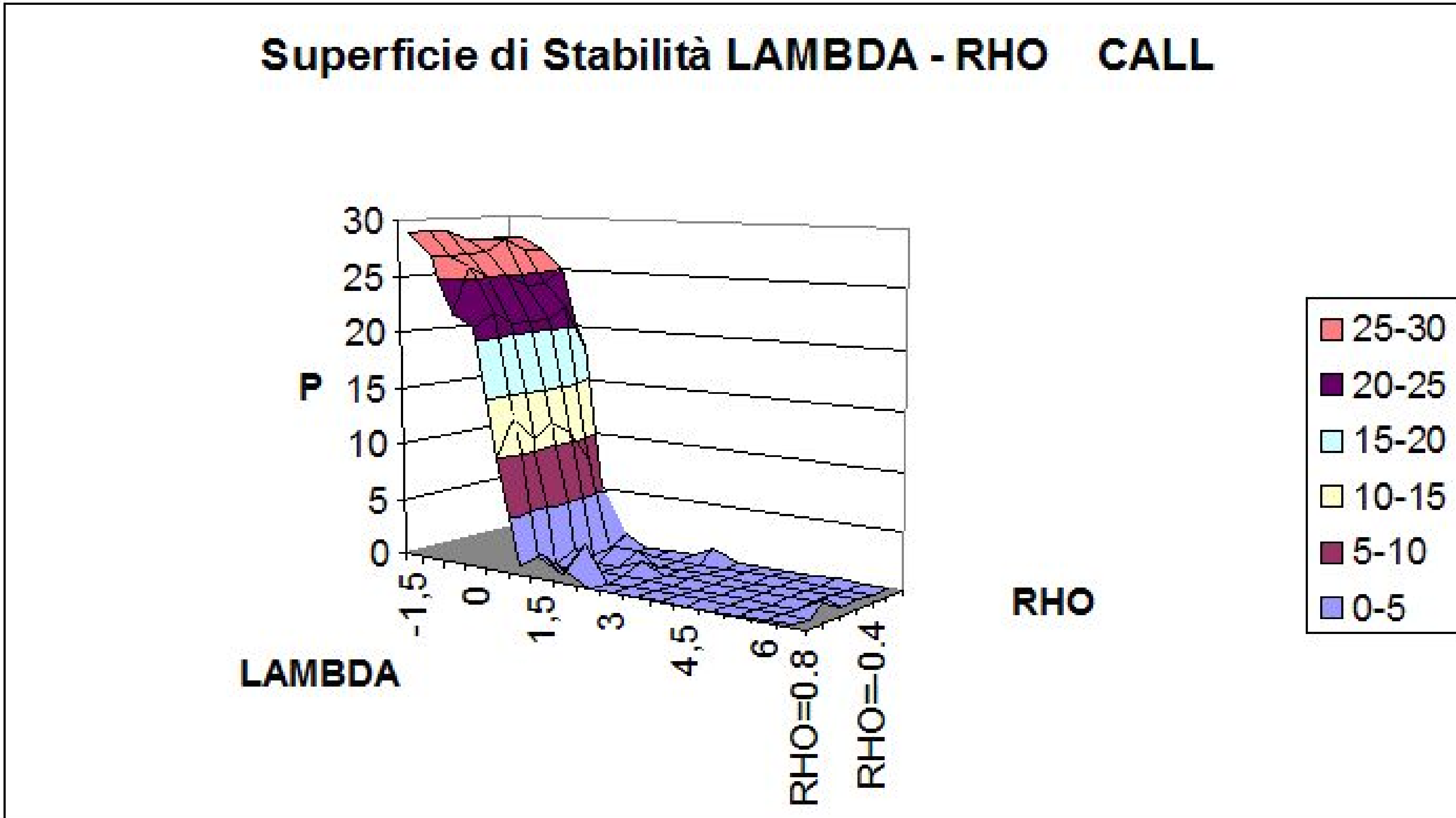
- Tali superfici sono una rappresentazione sintetica ed efficace dell'influenza dei vari parametri sulla stabilità della formula, e della loro interrelazione con il parametro più instabile;



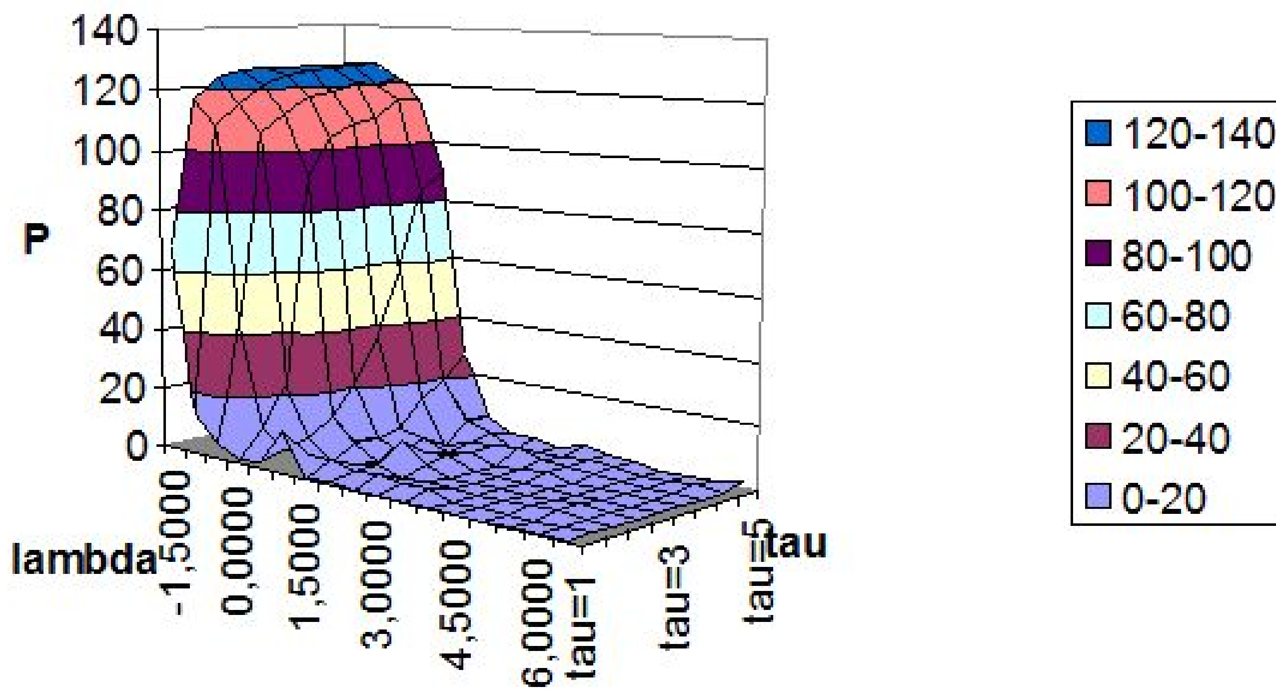


Superficie di Stabilità LAMBDA - ERRE CALL
30
25
20
C
15
10
5
0
-1,5
0,5
2,5
4,5
6,5
LAMBDA
ERRE=0
ERRE=0.2
ERRE
25-30
20-25
15-20
10-15
5-10
0-5

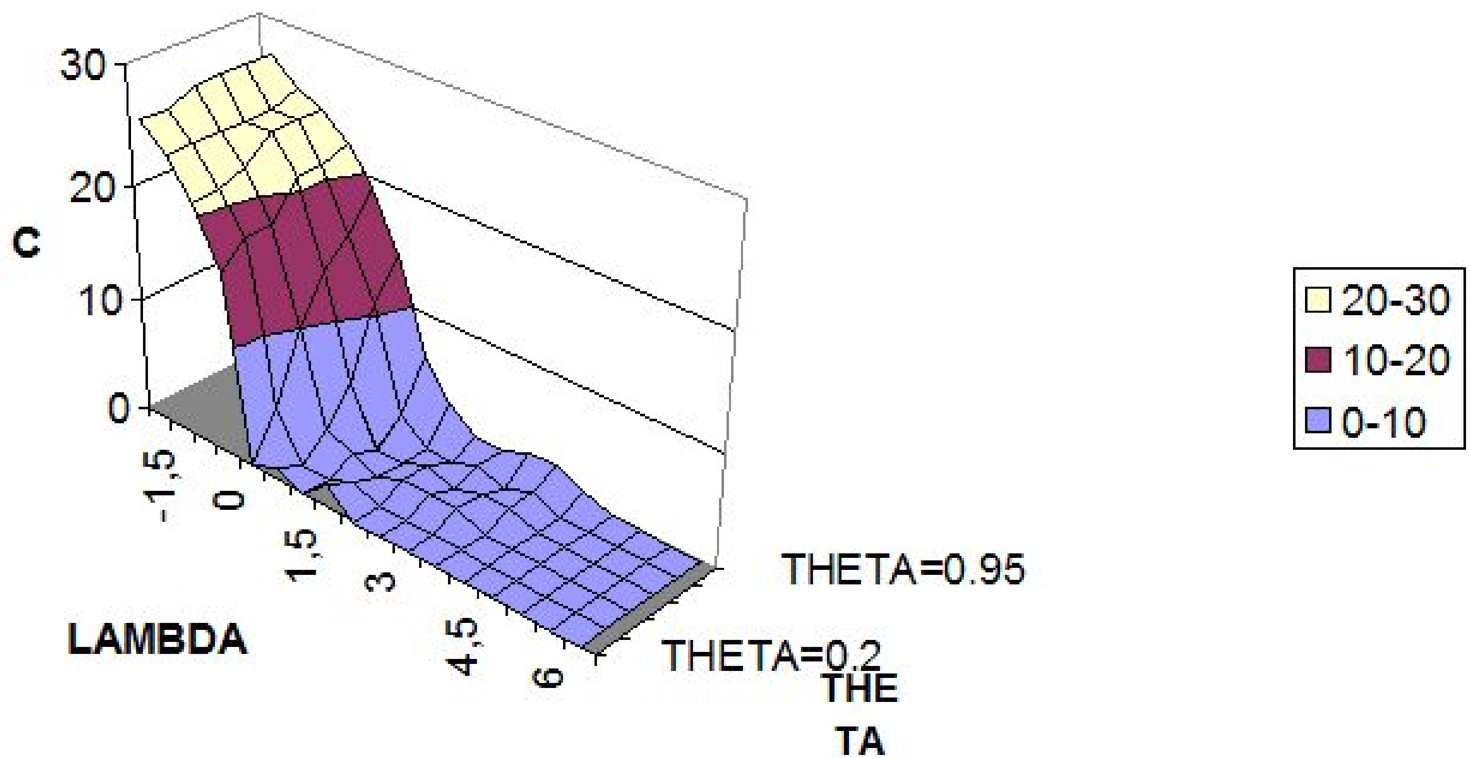

Superficie di Stabilità LAMBDA - CAPPA PUT
30
25
20
15
10
5
0
P
CAP
PA
LAMBDA
-1,5
0,5
2,5
4,5
6,5
CAPPA=0,3
5
25-30
20-25
15-20
10-15
5-10
0-5

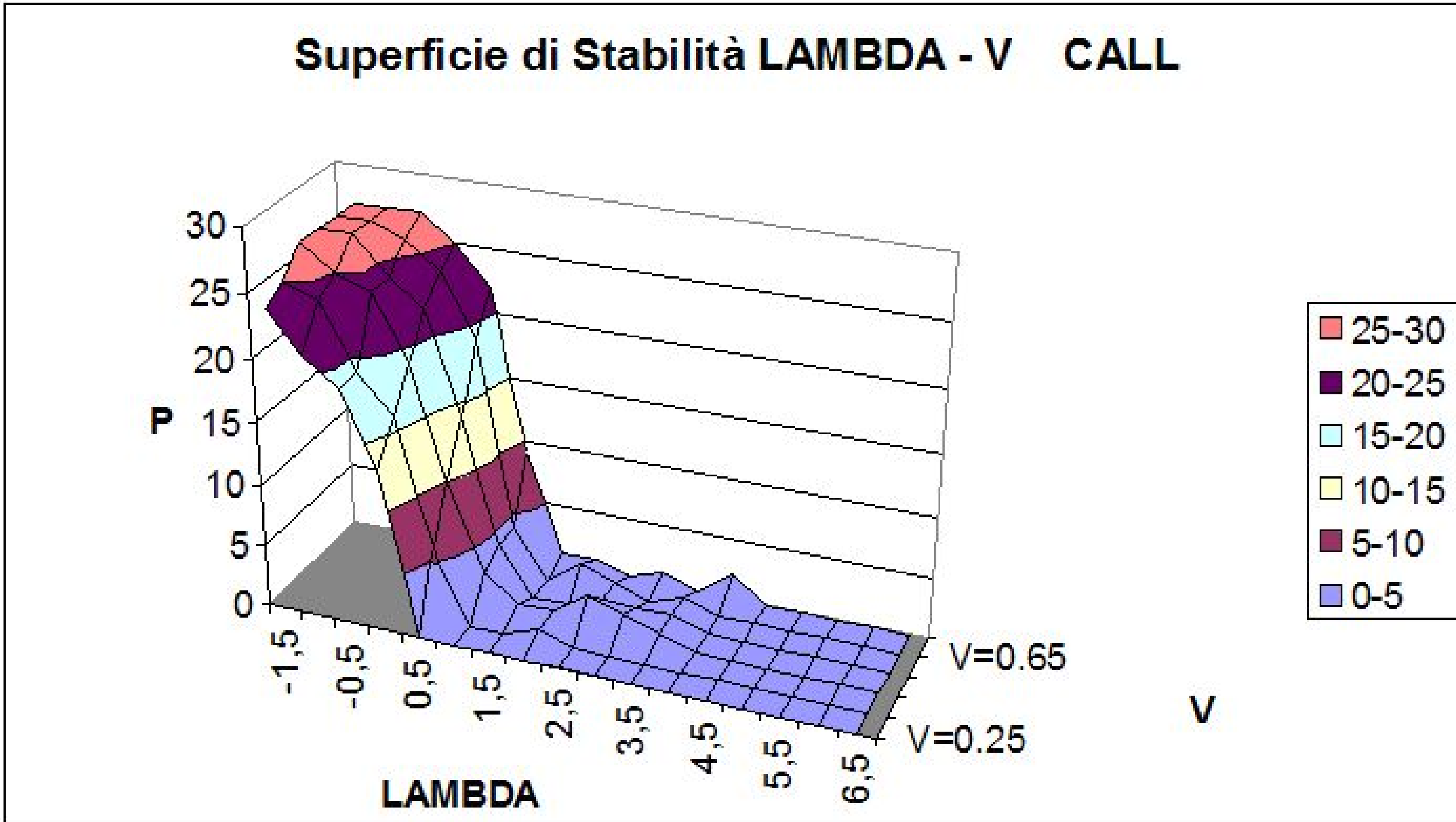

Superficie di Stabilità LAMBDA - RHO CALL
30
25
20
P
15
10
5
0
-1,5
0
1,5
3
4,5
6
LAMBDA
RHO=0.8
RHO=-0.4
RHO
25-30
20-25
15-20
10-15
5-10
0-5

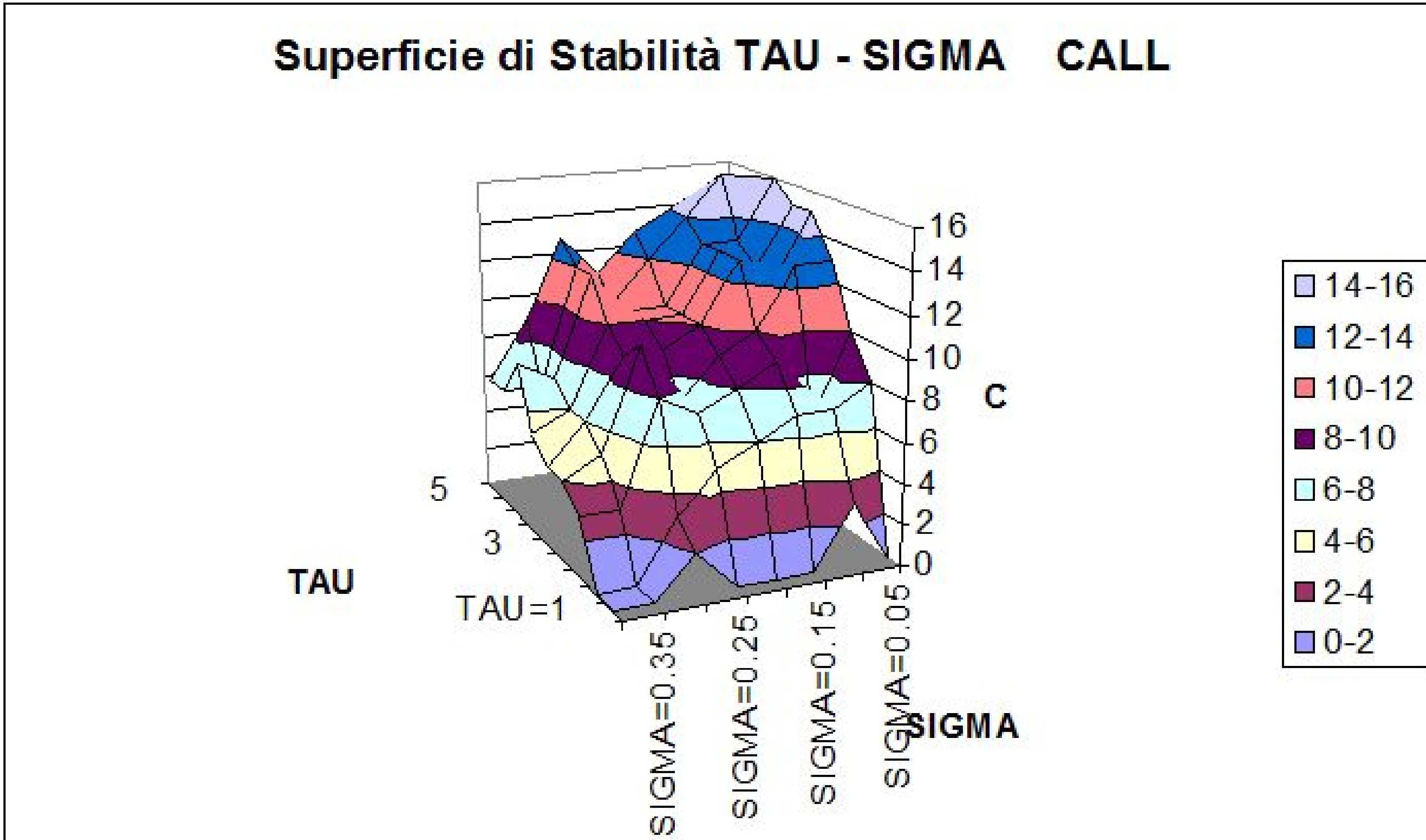
Superficie di Stabilità - Formula Heston CALL
Lambda - TAU

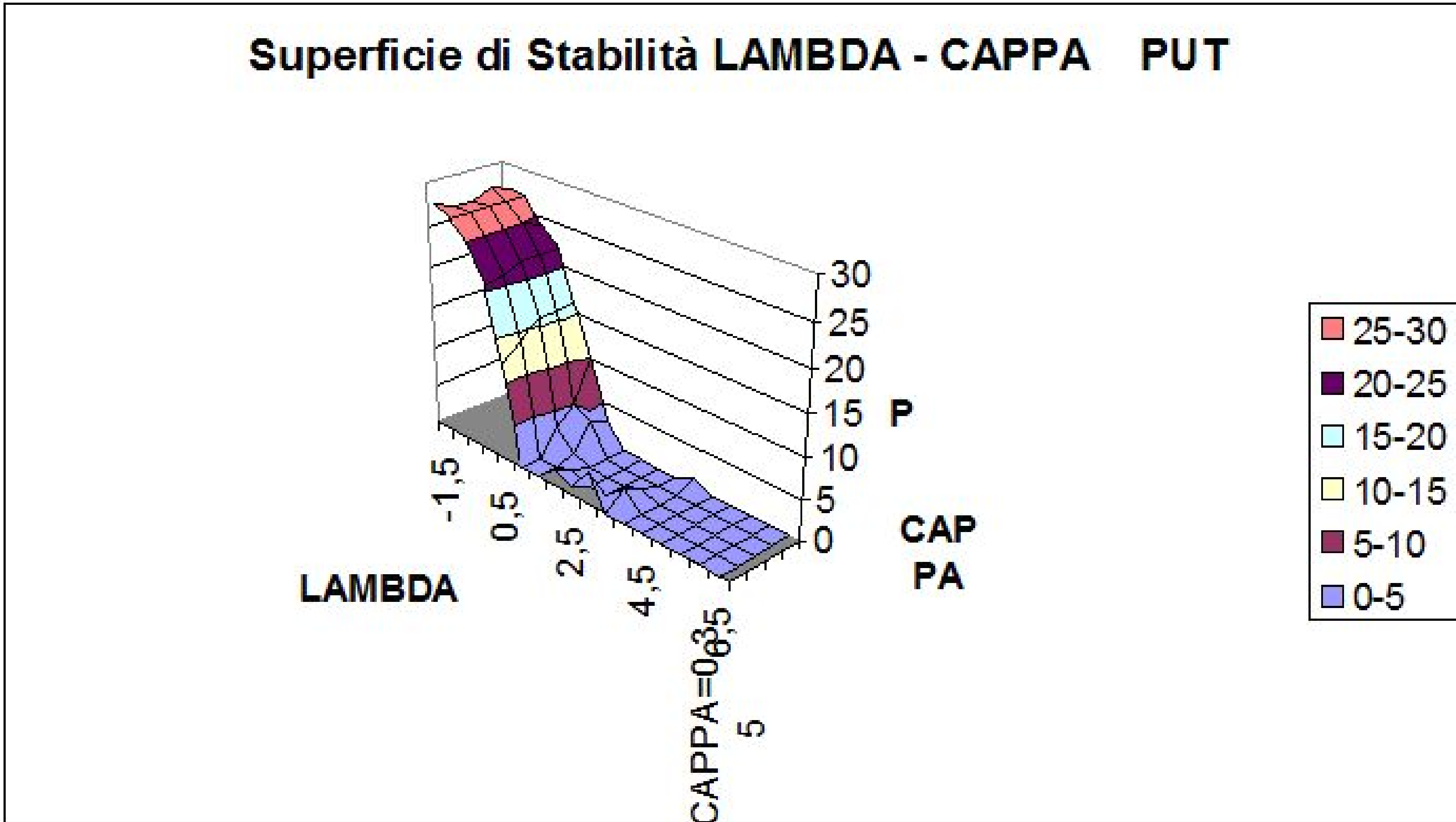


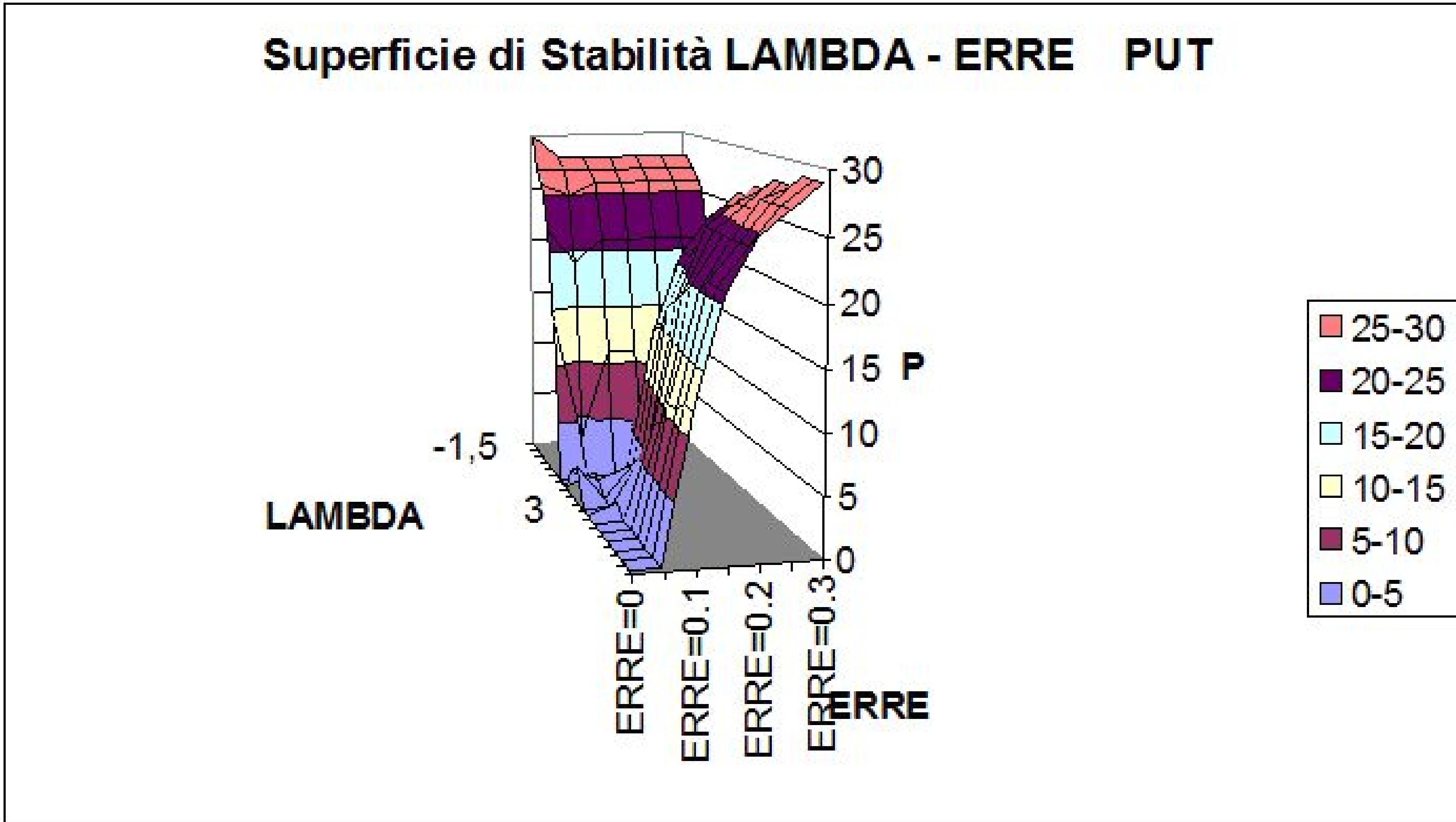
Superficie di Stabilità LAMBDA - THETA CALL




Superficie di Stabilità LAMBDA - V   CALL
30
25
20
15
10
5
0
P
-1,5
-0,5
0,5
1,5
2,5
3,5
4,5
5,5
6,5
LAMBDA
V=0.65
V=0.25
V
25-30
20-25
15-20
10-15
5-10
0-5

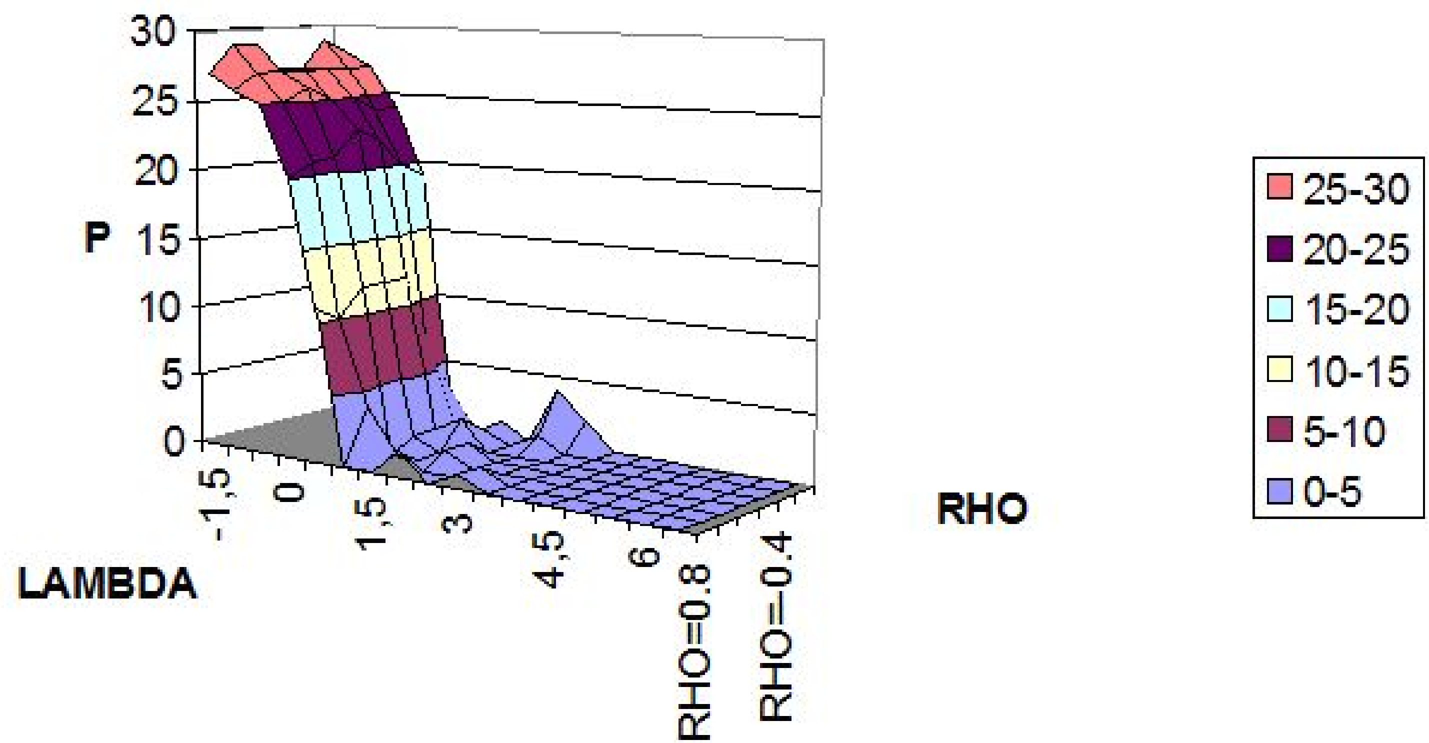

Superficie di Stabilità TAU - SIGMA CALL
16
14
12
10
8
6
4
2
0
C
5
3
TAU
TAU=1
SIGMA=0.35
SIGMA=0.25
SIGMA=0.15
SIGMA=0.05
SIGMA
14-16
12-14
10-12
8-10
6-8
4-6
2-4
0-2

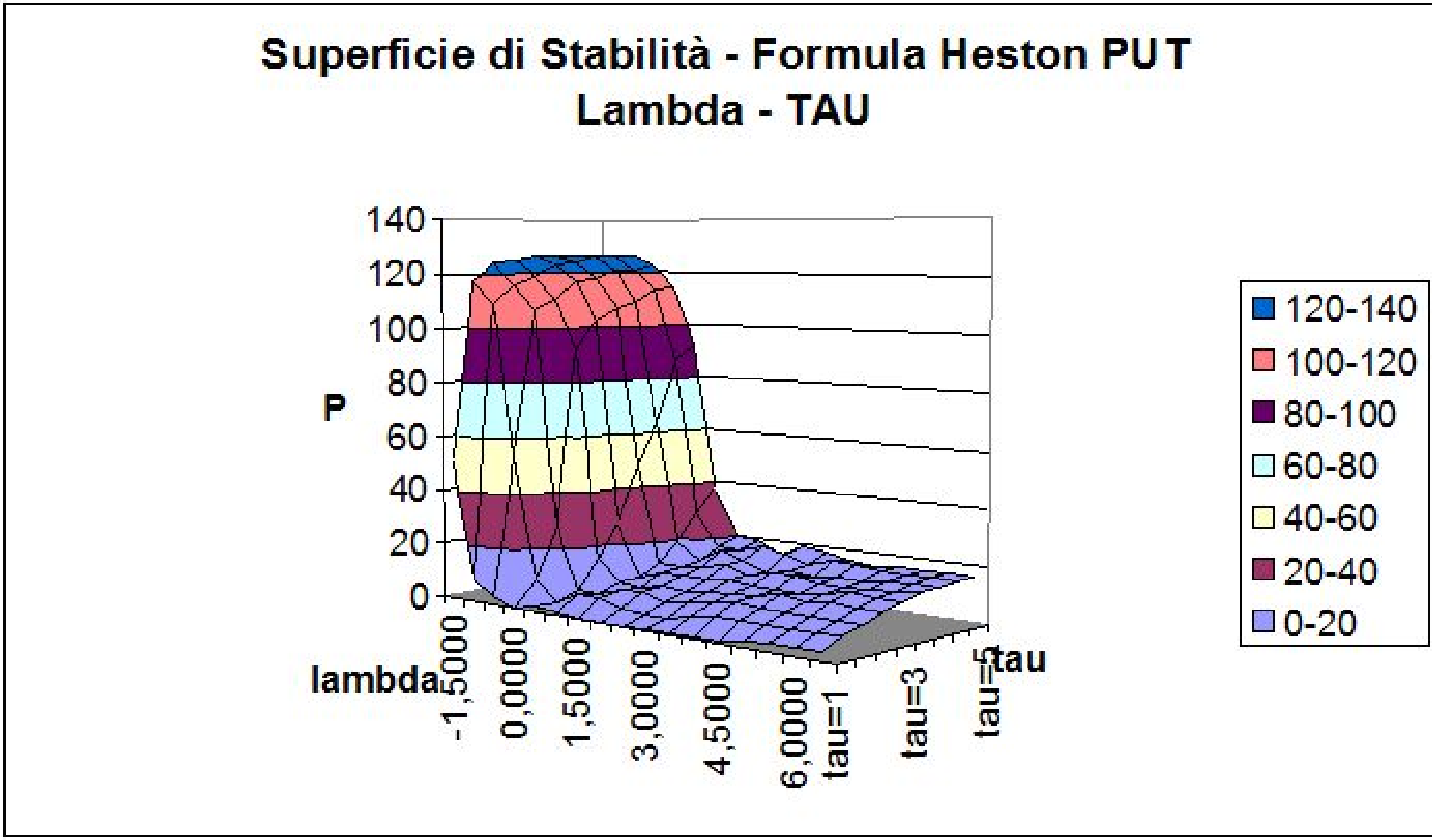

Superficie di Stabilità LAMBDA - CAPPA PUT
30
25
20
15
10
5
0
P
-1,5
0,5
2,5
4,5
LAMBDA
CAP
PA
25-30
20-25
15-20
10-15
5-10
0-5



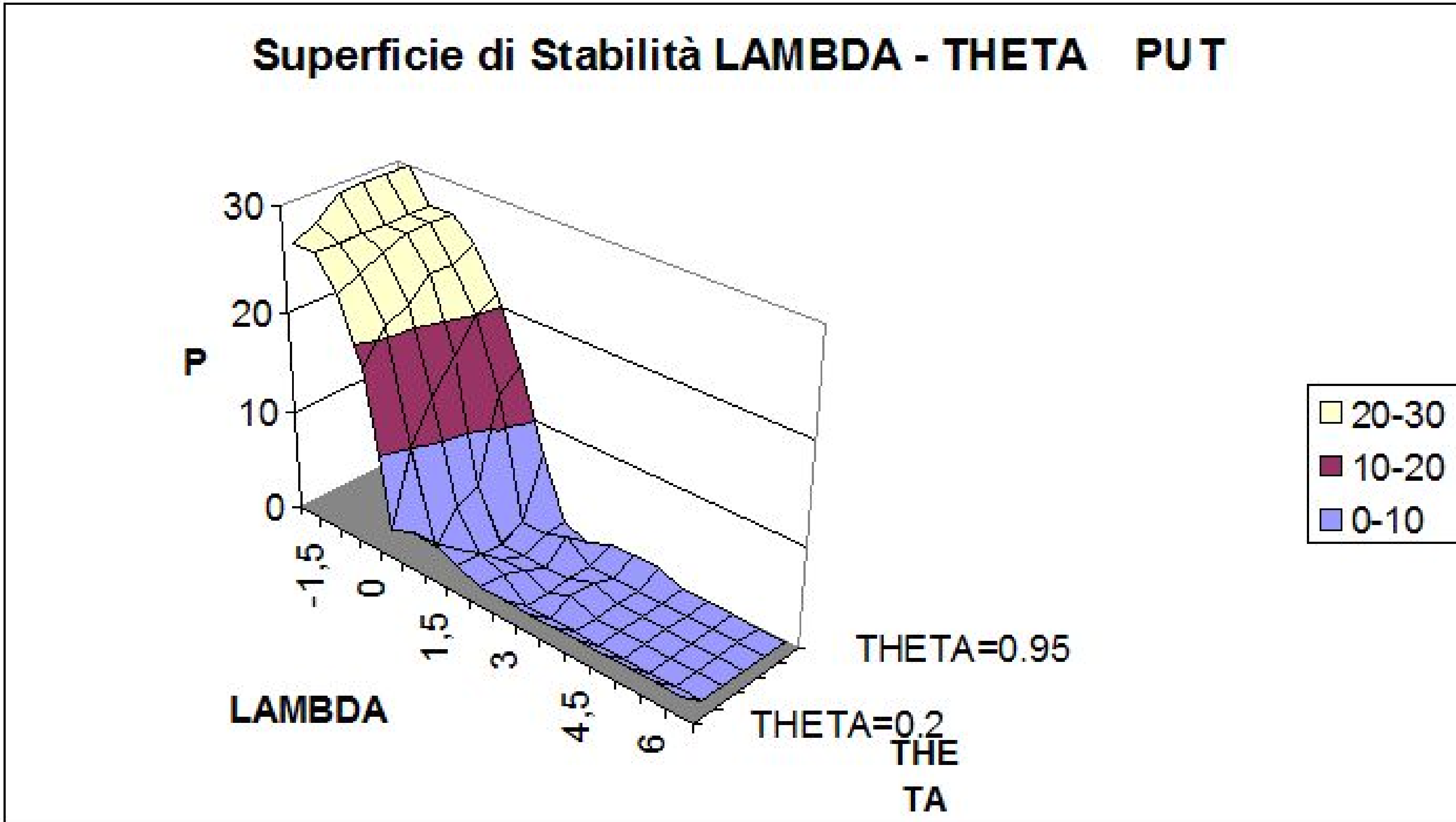
Superficie di Stabilità LAMBDA - ERRE   PUT
30
25
20
15
10
5
0
P
-1,5
3
LAMBDA
ERRE=0
ERRE=0.1
ERRE=0.2
ERRE=0.3
ERRE
25-30
20-25
15-20
10-15
5-10
0-5

Superficie di Stabilità LAMBDA - RHO   PUT

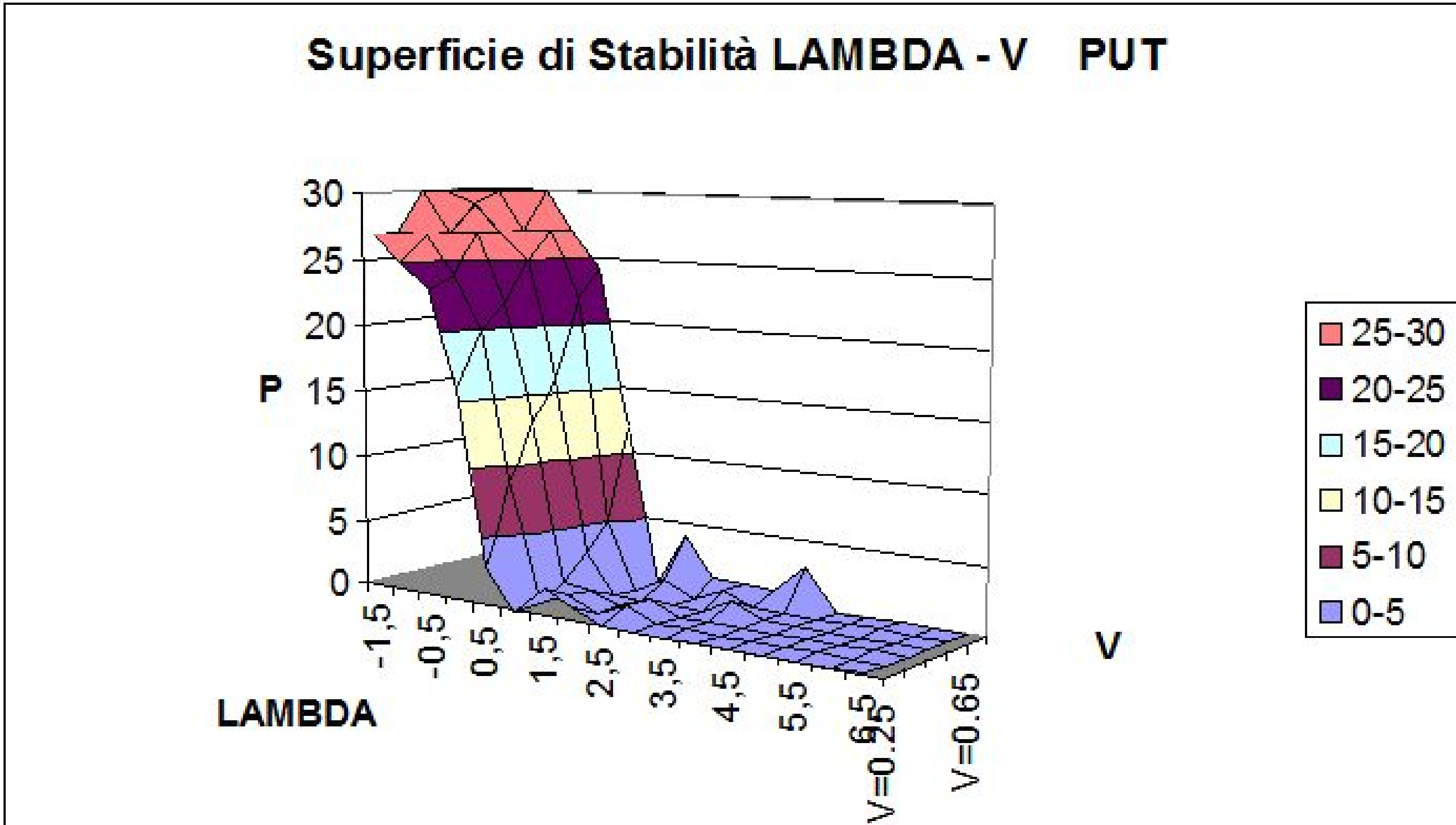




Superficie di Stabilità - Formula Heston PUT
Lambda - TAU
140
120
100
80
60
40
20
0
P
lambda
-1,5000
0,0000
1,5000
3,0000
4,5000
6,0000
tau=1
tau=3
tau=5
tau
120-140
100-120
80-100
60-80
40-60
20-40
0-20



Superficie di Stabilità LAMBDA - THETA PUT
30
20
10
0
P
-1,5
0
1,5
3
4,5
6
LAMBDA
THETA=0.95
THETA=0.2
THETA
20-30
10-20
0-10



Superficie di Stabilità LAMBDA - V PUT
30
25
20
15
10
5
0
P
-1,5
-0,5
0,5
1,5
2,5
3,5
4,5
5,5
6,5
LAMBDA
V=0.25
V=0.65
V
25-30
20-25
15-20
10-15
5-10
0-5

Le Greche di Heston

- Il passaggio logico successivo è una completa analisi numerica del comportamento delle Greche e le studio delle interrelazioni reciproche tra i vari parametri.

- Le Greche di Heston, ad una prima analisi, sembrano possedere un andamento complesso ed articolato dipendente dall’influenza di rilievo di alcuni parametri.

Greche di Heston – Principali Outlines

- Il premio per il rischio di volatilità non ha un’influenza neutra sulle diverse greche;
- Se il premio per il rischio è vicino alla “soglia di esplosione”, il valore della greca (l’impatto del parametro sul prezzo del derivato) tende ad **accrescersi**;
- I parametri fonte di instabilità numerica sono causa diretta degli andamenti complessi delle greche;