VOLATILITÀ IMPLICITA, COVERED WARRANTS E SCELTA DEGLI INVESTITORI

EXTENDED ABSTRACT

Marcello Minenna, PhD - CONSOB

Il presente lavoro dimostra che derivare la volatilità implicita nel prezzo dei covered warrant consente di apprezzare senza perdite di generalità il costo "relativo" di un'opzione e, quindi, offrire all'investitore un elemento informativo utile nella scelta tra opzioni, non particolarmente diverse per strike e scadenza, circostanza che caratterizza ampiamente il mercato dei covered warrants[1].

La teoria dell'option pricing si è tradizionalmente focalizzata sullo sviluppo di metodi per la prezzatura e per la copertura delle opzioni. Solo di recente nuovi approcci cercano di utilizzare i prezzi di mercato delle opzioni per cogliere una risorsa informativa ulteriore per operare in maniera più efficace sui mercati finanziari.

La volatilità implicita è il più semplice esempio di parametro statistico implicito nel prezzo di un'opzione. È evidente che la volatilità implicita non è necessariamente uguale alla varianza del titolo sottostante, in quanto è estratta dal prezzo delle opzioni e non dai dati storici dell'azione. Generalmente i due valori pertanto sono differenti.

1 La teoria dell'option pricing e la stima della volatilità implicita

Il prezzo di un'opzione al tempo t, π_t, può essere definito come il valore atteso dei flussi di cassa X, attualizzati al tempo t, che rappresentano il pay-off h_X dell'opzione a scadenza, sotto una certa misura di probabilità q, che tra tutte le misure di probabilità è l'unica misura che escluda la possibilità di arbitraggio. Quindi, se si denota con $q_{t,T}$ la funzione di densità condizionale del prezzo di un'azione a scadenza S_T sotto la misura Q, condizionato sulla sua naturale filtrazione $\mathcal{F}_t$, allora il prezzo di ogni derivato $\pi_t(X)$ con payoff h_X verifica:

$$\pi_t(X) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} h(S_T) q_{t,T}(S_T) dS_T \tag{1}$$

ove sotto la misura q il processo del prezzo dell'azione S nel tempo è descritto per il tramite di un'equazione differenziale stocastica ed, in particolare, da un moto geometrico browniano:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{2}$$

dove, r è il tasso di rendimento risk free, σ è una misura di dispersione di tale tasso e W_t con $t \in [0,T]$, è il moto Browniano unidimensionale definito sullo spazio filtrato delle probabilità $(\mathsf{W}, \mathcal{F}^W, P)$ con $\mathcal{F} = \mathcal{F}^W$.

La scelta di una misura di probabilità q che esclude la possibilità di arbitraggio consente di sostituire nella teoria dell'option pricing il rendimento tendenziale del titolo μ con il tasso di interesse risk free r. Questo non significa ovviamente che i prezzi delle azioni siano processi privi di un rendimento tendenziale. La misura Q e la sua densità $q_{t,T}$ sono meramente un passante matematico che consente di collegare, per finalità computazionali e predittive del processo stocastico S, i prezzi di differenti opzioni con medesima maturità. Questo consente di inferire dalla definizione del prezzo delle opzioni le informazioni relative al valore di σ, cioè la volatilità incorporata nel prezzo di un'opzione (c.d. volatilità implicita o implied volatility). Questo valore è infatti contenuto nella densità di probabilità $q_{t,T}$.

Quanto precede significa, quindi, che le informazioni implicite nel prezzo delle opzioni sono interamente contenute nella conoscenza della densita di probabilità $q_{t,T}$. Questo ha portato in letteratura a metodi che, partendo dal valore delle opzioni, ricercano la densità di probabilità q. Questa distribuzione q è chiamata *implied distribution*, e quando q è lognormale la sua varianza è proprio il valore della volatilità implicita nel prezzo delle opzioni.

Si possono distinguere tre metodi fondamentali per estrarre questa funzione di densità di probabilità: i metodi a espansione, che definiscono la densità q attraverso l'utilizzo di una espansione in serie[2], i non parametrici che estraggono la densità senza fare riferimento alla lognormalità della distribuzione del sottostante[3] e i metodi parametrici, che invece, di studiare l'insieme dei parametri che compongono la densità di probabilità $q_{t,T}$, hanno centrato la propria attenzione sul dato di volatilità implicita, ritenendo che la misura di probabilità Q determinata dai prezzi delle opzioni sia stabile e consistente con le ipotesi sottese al modello di pricing utilizzato[4].

Inoltre, come è noto questo valore è unico fissato il prezzo di un'opzione, è legato da una relazione monotona crescente con il prezzo dell'opzione stesso e non è influenzato nella sua interpretabilità dalla stima del tasso di interesse e di dividendo. Quanto precede consente di affermare senza perdite di generalità che la volatilità implicita offre una chiave interpretativa univoca in termini di comparabilità del prezzo di diverse opzioni. Pertanto, la conoscenza del prezzo dell'opzione o della volatilità consente di calcolare l'altro parametro e viceversa.

Nella pratica, la volatilità non è sempre osservabile, mentre i prezzi delle opzioni lo sono. L'inversione della formula potrebbe, pertanto, essere utile per arrivare al valore di volatilità e cioè determinare il valore σ_{BS} che restituisce il prezzo osservato sul mercato attraverso la formula di Black-Scholes. In sintesi:

$$\exists \sigma_{BS}(K,T), \qquad C(S_t, K, \sigma_{BS}(K,T), T) = P$$

Questo valore come già detto è chiamato *volatilità implicita* (Schmalensee, R. & Trippi, R.R., 1978)) $\sigma_{BS}(K,T)$ e può essere ottenuto attraverso una soluzione numerica, in quanto la formula di Black-Scholes essendo non lineare non è invertibile analiticamente.

Il più semplice algoritmo di soluzione è l'algoritmo di ricerca binomiale e alternativamente a questo algoritmo si può utilizzare il metodo di ricerca della radice di un'equazione Newton-Raphson[5].

2 Il comportamento degli operatori e degli investitori nel mercato dei covered warrants

Gli operatori che, in un mondo semplificato ove si negozino solamente opzioni call e put, come nel caso del mercato dei covered warrants, vogliano determinare i valori di volatilità implicita relativi, si trovano, alla luce di quanto dianzi esposto, a utilizzare e studiare la formula [1] ove h_X è il pay-off di opzioni call e put. Questa formula, come è noto, calcola il valore di un'opzione dati il prezzo del sottostante, la durata del contratto, il tasso di interesse, il prezzo strike e la volatilità. In questo modello esiste pertanto un solo parametro che non può essere direttamente stimato: la volatilità dell'azione sottostante. È, quindi, evidente l'opportunità per gli operatori per finalità di *trading* e di *risk management* di quotare i prezzi delle opzioni in termini di volatilità implicita. Tale approccio, infatti, consente di considerare specifiche caratteristiche dell'opzione e non le singole oscillazioni di prezzo del sottostante il cui monitoraggio è connesso esclusivamente a finalità di hedging statico, tipicamente basato sul calcolo del delta e del gamma. Questo non implica, nè significa che gli operatori ritengano che il modello di Black-Scholes per le opzioni europee o di Cox-Ross-Rubinstein adattato per le opzioni americane sia perfetto, ma solamente che l'analisi del valore della volatilità implicita rende le loro quotazioni dei prezzi delle opzioni più efficienti e oggettive (Schonbucher, 1998). Infatti, i trader di opzioni invertono la formula prevista dai modelli citati in quanto consente di ricavare rapidamente dal prezzo la volatilità e viceversa.(Chiras, Donald P., Manaster, Steven, 1978)

L'investitore che voglia operare in covered warrants, mercato caratterizzato dalla possibilità di scegliere tra più opzioni sul medesimo sottostante, ma simili per strike e scadenza, effettua generalmente la scelta esclusivamente sulla base di un'apprezzamento qualitativo, di dubbia efficacia, di tali parametri in relazione al prezzo osservato. In altri termini, la differenza tra i prezzi esposti analizzati qualitativamente in relazione ai diversi valori dello strike e della scadenza non è in grado di rendere comparabili in termini di "costo relativo" le opzioni.

Per comparare diverse opzioni può, invece, essere efficacemente utilizzata, per quanto in precedenza illustrato, la volatilità implicita. Questa, infatti se resa disponibile all'investitore offrirebbe la possibilità di apprezzare il costo di un'opzione "al netto" delle sue caratteristiche strutturali.

È comunque da precisare che questo dato deve essere utilizzato dall'investitore solo a condizione che le opzioni siano simili per struttura ovvero per strike e scadenza, altrimenti la sua osservazione potrebbe risultare fuorviante. Si ricordano, infatti, a puro titolo esemplificativo, i lavori di Derman e altri riportati in bibliografia che hanno evidenziato la presenza di una variabilità della volatilità in relazione alle caratteristiche strutturali di un'opzione.

Note

[1]Le considerazioni quantitative riportate sono esposte, per semplicità, fondamentalmente con riguardo ad opzioni europee, in quanto la loro esplicitazione nel caso di opzioni americane e barriera richiede solo l'utilizzo di alcuni accorgimenti computazionali e non offre alcun ulteriore riferimento intuitivo.

[2]I principali metodi a espansione sono: le *lognormal Edgeworth expansions* (Jarrow, R. & Rudd, A., 1982), le *cumulant expansions* (Potters M., Cont R. & Bouchaud, J.P., 1998) e le *Hermite polynomials*

(Abken P., Madan D.B. & Ramamurtie, S., 1996).

[3] I principali metodi sono: la *kernel regression* (Ait-Sahalia, Y. & Lo, A.H., 1996) e la tecnica della *maximum entropy* (Buchen, P.W. & Kelly, M., 1996).

[4] Si cita ad esempio il concetto di *implied volatility* quale elemento base per inferire sul comportamento futuro della volatilità (Schmalensee & Trippi, 1978 e Dumas, Fleming, Whaley, 1998) o per fare test di efficienza del mercato (Chiras & Manaster, 1978).

[5] Entrambi i metodi possono essere utilizzati con il modello di Cox-Ross-Rubinstein adattato per il pricing di opzioni americane.

Bibliografia

[1] Abken P., Madan D.B. & Ramamurtie, S. (1996) "Estimation of risk-neutral and statistical densities by Hermite polynomial approximation" Federal Reserve Bank of Atlanta.

[2] Ait-Sahalia, Y. & Lo, A.H. (1996) "Nonparametric estimation of state price dens ities implicit in financial asset prices " NBER Working Paper 5351.

[3] Black, F., Scholes, M. (1972) The valuation of option contracts and a test of market efficiency. J. Finance 27, 399-417.

[4] Buchen, P.W. & Kelly, M. (1996) "The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices" *Journal of Financial & Quantitative Analysis*, **31**, 143-159.

[5] Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M. (1979a) Option pricing: a simplified approach.J. Finan. Econom. 7, 229-263.

[6] Cox J., Rubinstein M., (1985) "Options Market", 278

[7] Chiras, Donald P. & Manaster, Steven (1978) "The information content of option prices and a test of market efficiency" *Journal of Financial Economics*, **6** 187-211.

[8] Derman, E., Kani, I., (1994) Riding on the smile. *Risk*,7:32-29.

[9] Derman, E., Kani, I., Chriss, N., (1996) Implied trinomial trees of the volatility smile. Journal of Derivatives, 4(2):7-22.

[10] Dumas B., Fleming J., Whaley R. (1998) "Implied volatility functions: empirical tests *Journal of Finance*, vol. LIII, no.**6,** 2059.2105.

[11] Jarrow, R. & Rudd, A. (1982) "Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes" in *Journal of Financial Economics* **10**, 347-369.

[12] Potters M., Cont R. & Bouchaud, J.P. (1998) "Financial markets as adaptive systems" *Europhysics Letters*, **41** (3).

[13] Rubinstein, M. (1994) "Implied binomial trees" *Journal of Finance*, **49**, 771-818.

[14] Schmalensee, R. & Trippi, R.R. (1978) "Common stock volatility expectations implied by option prices" *Journal of Finance*, **33**, 129-147.